

અંકગણિતની રીતો ને તેનાં કારણ.

છક્કા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ અને
ટ્રેનિંગ કોલેજના સ્કાલરોના
ઉપયોગ માટે.

૨૪૧૧

વિકુલદાસ ધનજીભાઈ,
હડ ગારનાર, ફ્રીમેસન ટ્રેનિંગ કોલેજ.

અમદાવાદ
આર્યોદય પ્રેસ.

સંવત ૧૯૪૧—સન ૧૯૮૫:

(સર્વ હક સ્વાધીન.)

ફીમન ૬ આના.



અંકગણિતની રીતો ને તેનાં કારણ.

છટ્ટા ધોરણના વિદ્યાર્થીઓ અને
ટ્રેનિંગ કોલેજના સ્કાલરોના
ઉપયોગ માટે.

રચનાર


વિહારદાસ ધનજીભાઈ.
હેડ માસ્ટર, ટ્રીનિટી ટ્રેનિંગ કોલેજ.

અમદાવાદ
આર્યોદય પ્રેસ.

સન ૧૯૪૧—સન ૧૯૮૫.

(સર્વ હક સ્વાધીન.)

કીમત ૬ આના.



અર્પણ પત્રિકા.



રા. બા. ગોપાળજી સુરભાઈ દેશાઈ
ફેલો એન્ડ ધી યુનિવર્સિટી.

આ ટ્રસ્ટ ઓફ ઇન્ડિયન ઇન્સ્ટિટ્યુટ
ફોર ઇન્ડિયાનાં

ગુજરાતના ધણા ભાગમાં પ્રગવર્ણિત શરૂઆતથી
પ્રચાર કરવામાં આપેલા એક સરખો કિસ્સો
અને આગ્રહ તથા મારી સાથેના લાંબી મુ-
દતના પ્રેમની યાદગીરી રાખવાના પત્ર
હૈતુથી આ શાલોપયોગી પુસ્તક હું
આપને પ્રેમ પૂર્વક અર્પણ કરું છું
તે સ્વિકારશે.

સેવક

વિઠ્ઠલદાસ ધનજીભાઈ.



પ્રસ્તાવના.

અંકગણિતની રીતોનાં કારણુ સમજ્યા વગર માત્ર રીતો જાણી દાખલા ગણી જવાથી એ વિષયનાં મૂળતત્ત્વનું ખરું જ્ઞાન થતું નથી અને તેથી તે વિષય પરિપક્વ આપણે ગણાય નહિ. તેમજ કારણુ જાણ્યા વગર વિદ્યાર્થીનું મન પ્રવૃત્તિ થતું નથી. કારણુ એ, તે વિષયનો પાયો છે. જેમ પાકા પાયા વગર ઇમારત ટકતી નથી તેમ કારણુ સમજ્યા વગર અંકગણિતનું જ્ઞાન નિષ્ફળ જાય છે. માટે દરેક વિદ્યાર્થીને એની અગત્ય છે.

સરકારી અંકગણિતમાં અને બીજાં અંકગણિતોમાં અંકગણિતની રીતોનાં કારણો આપેલાં છે પણ તે છોકરાંના મન ઉપર ઇસાવવામાં આવતાં હોય એમ જણાતું નથી. વળી તે લંબાણમાં તે છૂટક છૂટક હોવાથી છોકરાંને સમજવાને ગુચ્ચણ પડે છે. તેથી એ કારણો વિષયવાર સામગ્રી સહેલી ભાષામાં લખેલાં હોય તો તે છોકરાંને વધારે ઉપયોગી થઈ પડે. આતું એકે પુસ્તક ગુજરાતીમાં આજ સુધી બહાર પડ્યું નથી, તેવા પુસ્તકની હું જ્યારે રાજકોટ ટ્રેનિંગ કાલેજમાં હતો ત્યારથી મને જરૂર જણાઇ હતી. છઠ્ઠા ધોરણનો અભ્યાસ કરનારા વિદ્યાર્થીને અને ટ્રેનિંગ કાલેજના સ્કાલરોને એવી ચોપડી વગર ઘણી અડચણ પડતી જણવામાં આવવાથી તે દૂર કરવાના ઇરાદાથી તથા અંકગણિતનું જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને બરાબર મળી શકે એ ઇરાદાથી આ નાનું પુસ્તક બહાર પાડ્યું છે.

એ પુસ્તકમાં સરકારી અંકગણિતમાં જેટલા વિષયો આપેલા છે તેનાં કારણુ ઉપરાંત ઇષ્ટરાશી, જાને જાતની

શ્રેણીનાં કારણો તથા સંખ્યાનો પાયો, જેટલી બની શકે તે-
ટલી સહેલી ભાષામાં, ટુંકામાં સ્પષ્ટતાથી સમજાવવા યત્ન
કર્યો છે તથા અમુક રીતોના ગિત્રાણુથી કેવા પ્રકારના દાખ-
લા થઈ શકે છે તે પણ બધાં જરૂર જણાઈ ત્યાં આપ્યું
છે. મનુષ્ય કે જેમ અને તેમ વિદ્યાર્થીઓને આ ચોપડી
ઉપયોગી થઈ પડે તેવો, બની શકે તેટલો પ્રયત્ન કર્યો છે.
મારો એ પ્રમત્ત કેટલો સફળ થયો છે તે તેના ઉપયોગ
અથવા ઉપરથી સમજશે.



અંકગણિતનાં કારણ.

આપણી સંખ્યાનો પાચો દશનો કહેવાયછે તેનું કારણ.

કોઇપણ સંખ્યા ૦, ૧, ૨, ૩, ૪, ૫, ૬, ૭, ૮, ૯ એ દશ આંકડાવડે બતાવાયછે. એમાં ૦ ની કીંમત કાંઈ નથી, ૧ ની કીંમત એક, ૨ ની કીંમત બેવાર એક અથવા બે. ૬ ની કીંમત નવ વાર એક અથવા નવ. એવા એક જાતના ફેટલાક એકમો એકઠા કરવાથી સંખ્યા થાય છે. એ સંખ્યા બે આંકડાથી બતાવાય ત્યારે તેમાં પહેલો અથવા ડાબા હાથ બાજીનો આંકડો દશક કહેવાય છે, કેમકે એકમ કરતાં તે દશ ગણો હોય છે. જેમ ૩૫ એમાં ત્રણ એ દશક છે કેમકે ત્રણ એકમ દશવાર ને પાંચ એકમ મળીને એ ૨૬મ થએલી છે. એજ પ્રમાણે દશકની પહેલાં (ડાબા હાથ બાજી) એક આંકડો હોય તો તે શતક કહેવાય છે, કેમકે એકમ કરતાં તે સો ગણો અથવા દશક કરતાં દશ ગણો હોય છે. જેમકે ૩૨૫ એમાં ત્રણ એ શતક છે, કેમકે સો વાર ત્રણ એકમ, લેવાથી થાય છે, અથવા ત્રણ દશક દશવાર લેવાથી થાય છે. એ પ્રમાણે આપણી સંખ્યામાં જમણા હાથ બાજીના આંકડાના સ્થાન કરતાં દરેક ડાબા હાથે બાજીના આંકડાનું સ્થાન દશ દશ ગણું વધતું જાયછે અને તેથીજ આપણી સંખ્યાનો પાચો દશનો કહેવાય છે.

સરવાળો.

સરવાળાની રીતનું કારણ.

એક કરતાં વધારે સંખ્યાઓને એકઠી કરવાની રીતને સરવાળો કહે છે. સરવાળો કરવાને સુગમ પડે માટે એક સંખ્યાની નીચે બીજી, ને તેની નીચે ત્રીજી, અને તેમાં પછી પહેલી

સંખ્યાના એકમ નીચે બીજીનો એકમ, દશક નીચે દશક એ પ્રમાણે લખાયછે, પછી બધી સંખ્યાના એકમો એકઠા કરી તેમાંથી જેટલા દશક નીકળે તેટલા કહાડી દશકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરવા ને વધેલા એકમ, એકમના સ્થાનમાં લખવા. દશકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાંથી શતક નીકળે તો કહાડી તેને શતકના સ્થાનના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરવા, ને વધેલા દશક, દશકના સ્થાનમાં લખવા. એજ પ્રમાણે આગળ પણ કરતા જવું.

સરવાળો સમતિય સંખ્યાઓનો કે સાદી સંખ્યાઓનોજ થાય, કેમકે પાંચ રૂપિયામાં આઠ રૂપિયા ઉમેરાય પણ આઠ ધર ઉમેરાય નહીં, તેમજ સરવાળો એકમના સ્થાનથી કરાય, કેમકે એકમમાંથી દશક નીકળે તે દશકના સ્થાનમાં ઉમેરતાં સુગમ પડે, પણ દશકના સ્થાનના અંકોનો સરવાળો પ્રથમ મૂક્યા પછી એકમ સ્થાન અંકોના સરવાળામાંથી દશક નીકળે તે ઉમેરવા પડે ત્યારે પ્રથમ મૂકેલા દશક રદ કરવા પડે અને એ પ્રમાણે પહેલાંના અંકોના સરવાળામાં પણ હરકત આવે તે હરકત દૂર કરવાનેજ સરવાળો જમણી તરફથી કરીએ છીએ. પણ જો દરેક સ્થાનના અંકોનો સરવાળો દશની અંદર થતો હોય તો તે સરવાળો ડાબી તરફથી કરવામાં પણ કાંઈ હરકત પડતી નથી. પણ એ પ્રમાણે કોઈકજ વાર બને છે, અને તેથી જમણી તરફથી સરવાળો કરવાની રીત રાખી છે.

બાદબાકી.

બાદબાકીની રીતનું કારણ.

બાદબાકી પણ સમતિય સંખ્યાનીજ થાય અને તે સરવાળાની પેઠે મોટી સંખ્યાના એકમની નીચે નાની સંખ્યાના એકમ અને દશકની નીચે દશક મૂકીને લખાય અને બાદબાકી કરવાની રીત પણ સરવાળાની પેઠે એકમથી

શરૂ થાય છે. મોટીના એકમમાંથી નાનીના એકમ બાદ કરવા પણ જો મોટીના એકમ ઓછા હોય તો તેના દશકમાંથી એક દશક લેઈ તેના દશ એકમ, એકમમાં ઉમેરી તેમાંથી બાધાંકના એકમ બાદ કરવા. પછી અધિકાંકના દશકમાંથી એક દશક લીધો હતો તે, તેમાંથી ઓછો કરવાને બદલે બાધાંકના દશકમાં એક ઉમેરી અધિકાંકના દશકમાંથી બાદ કરીએતો પણ ચાલે. પણ જો તે બાદ થઈ ન શકતા હોય તો એકમની પેઠે દશકમાં પણ એક શતક લેઈ તેના દસ દશક જોમેરી ઉપર પ્રમાણે કરવું. આ પ્રમાણે હલકા સ્થાનથી બાદબાકી કરવાનું સરવાળાની માફક સુગમ પડે છે તેથી બાદબાકી પણ જમણી તરફથી કરવાની રીત રાખી છે.

ગુણાકાર.

એકની એક સંખ્યા કેટલીક વખત લેઈ તેનો સરવાળો કરવાની સહેલી રીતને ગુણાકાર કહે છે. જેમકે આરૂપિઆ પાંચવાર લેઈએ તો આરૂપિઆને પાંચવાર મૂકી સરવાળો કરવાથી અને આરૂપિઆને પાંચે ગુણવાથી ૨૦ રૂપિઆ આવશે. આમાં આરૂપિઆને ગુણ્ય, પાંચને ગુણક અને ૨૦ રૂપિઆને ગુણાકાર કહે છે. ગુણાકારમાં ગુણ્ય અને ગુણક બંને અથવા બેમાંથી એક સાદી સંખ્યા જોઈએ, પણ બંને સંયુક્ત સંખ્યા ન જોઈએ. આરૂ ને પાંચ ગણા કરાય અથવા આરૂ રૂપિઆને પાંચ ગણા કરાય, પણ આરૂ રૂપિઆને પાંચ રૂપિઆ ગણા કે પાંચ ઘર ગણા ન કરાય એ સ્પષ્ટ છે.

કોઈ સંખ્યાને શૂન્યે ગુણીએ તો ગુણાકાર શૂન્ય આવે તેનું કારણ.

કોઈ પણ સંખ્યાને એકે ગુણીએ તો ગુણાકાર તે સંખ્યા જોડેલો આવે, પણ શૂન્યે ગુણીએ તો ગુણાકાર શૂન્ય આવે, કેમકે આરૂને એકગણા કરીએ અથવા એકવાર જો

છએ તો ચાર આવે પણ અરધાવાર લેઈએ તો બે, પાંચાસ લેઈએ તો એક, ને દુનિયાર લેઈએ તો ગા, એમ ગુણક ઘટાડતા જઈએ તેમ ગુણાકાર ઘટતો જાય છે. એ ઉપરથી સમજાય છે કે ગુણક ઓછામાં ઓછો લેઈએ તો ગુણાકાર ઓછામાં ઓછો આવે, ને ગુણક જેની કીંમત કાંઈ નથી, તેવો (શુન્ય) લેઈએ તો ગુણાકાર શુન્યજ આવે એ દેખીતું છે.

ગુણાકાર જમણી તરફથી કરીએછીએ તેનું કારણ.

ગુણાકાર પ્રથમ જમણી તરફથી કરીએ છીએ, કેમકે આપણે સંખ્યા લખવામાં જમણી તરફ એકમ, તેની ડાબી તરફ દશક, એ પ્રમાણે દશ દશ ગણા ચડતા અંક ડાબી તરફ લખીએછીએ. હવે એકમનો ગુણાકાર કરતાં તેમાંથી દશક નીકળે તે કહાડી, દશકના ગુણાકારમાં ઉમેરવો જોઈએ, ને દશકના ગુણાકારમાંથી શતક નીકળે તે શતકના ગુણાકારમાં ઉમેરવો જોઈએ. પણ તેમ કરવું ડાબી તરફથી ગુણાકાર કરતાં આવીએ તો બહુ અવધડ પડે માટે જમણી તરફથી ગુણાકાર શરૂ કરીએ છીએ, કે જેથી એકમના ગુણાકારમાંથી નીકળેલા દશકને અને દશકના ગુણાકારમાંથી નીકળેલા શતકને ઉમેરતાં સુગમ પડે.

ગુણાકારમાં એક એક અંક કાપીએ છીએ તેનું કારણ.

ગુણાકારમાં એક એક અંક કાપીએ છીએ કેમકે ગુણ્યને એકમે ગુણ્ય પછી ગુણ્યના દશકે ગુણીએ છીએ. એટલે પ્રથમ અંક દશકનો આવશે, ને પહેલાં એકમે ગુણેલી સંખ્યામાં પ્રથમ અંક એકમનો છે તે એકમ નીચે દશકનો અંક મૂક્યાથી સરવાળો કરવાને અડચણ પડે માટે એકમના

૧. સીખનાર ગુણાકાર ભાગાકારની રીત શીખી ગએલા છે ને તે રીત અંકગણિતમાં છે માટે તે રીતો નહિ આપતાં તેનાં કારણજન માત્ર આપીશું. તો પણ જ્યાં તે રીત આખ્યા વગર કારણ સમજાય તેમ નહિ હોય, ત્યાં તે રીત પણ આપીશું ખરાં.

ગુણાકારમાંના દશકની નીચે દશકના ગુણાકારનો પહેલો અંક અથવા દશક મૂકીએ છીએ. અથવા પ્રથમ એકમે ગુણ્યા પછી બીજા અંકે (દશકે) ગુણવાના છે એટલે દશકના ગુણાકાર ઉપર એક મીડું આવશે. તેમજ શતકે ગુણીએ તો તે ગુણાકાર ઉપર બે મીડાં મૂકવાને બદલે દશકના ગુણાકાર ઉપર એક મીડું નહિ મૂકતાં એક અંક કાપીએ છીએ અને શતકના ગુણાકાર ઉપર બે મીડાં મૂકવાને બદલે એકમના ગુણાકારમાંથી બે અને દશકના ગુણાકારમાંથી એક અંક કાપીને મૂકીએ છીએ.

ભાગાકાર.

એક સંખ્યામાંથી બીજી નાની સંખ્યા કેટલી વખત બાદ જઈ શકે છે અથવા એક સંખ્યામાં બીજી નાની સંખ્યા કેટલી વાર રહેલી છે તે કહાડવાની સહેલી રીતને ભાગાકાર કહે છે. જેમકે ૨૦ રૂપિયામાં ચાર રૂપિયા કેટલી વાર રહેતા છે. તે ૨૦ રૂપિયામાંથી ચાર રૂપિયા પાંચવાર બાદ કરીશું અથવા ૨૦ રૂપિયાને ચાર રૂપિએ ભાગીશું તો પણ નીકળશે. આમાં ૨૦ રૂપિયાને ભાજ્ય, ચાર રૂપિયાને ભાજક ને પાંચને ભાગાકાર કહે છે. આ ઉપરથી માત્રમ પડશે કે ભાજ્ય. ભાજક ને ભાગાકાર એ ત્રણ પદોમાંથી એક સાદી સંખ્યા જોઈએ અને સંયુક્ત સંખ્યા સન્નતિય જોઈએ જેમકે ૨૦ રૂપિયામાંથી ચાર રૂપિયાના ભાગ કરીએ તો પાંચ રૂપિયા નહિ આવે અથવા ૨૦ રૂપિયાના પાંચ ભાગ કરીએ તો દરેક ભાગ ચાર રૂપિયાનો આવે પણ ૨૦ રૂપિયામાંથી પાંચ ઘર જેટલા ભાગ ન થાય.

ભાગાકાર ડાબી તરફથી કરીએ છીએ તેનું કારણ.

ભાગાકાર ડાબી તરફથી પ્રથમ શરૂ કરીએ છીએ કેમકે ડાબી તરફના અંક દશ દશ ગણા વધારે છે ને જમણી તરફના અંક દશ દશ ગણા ઓછા છે. હવે પ્રથમ ભારે અંક

કને ભાગતાં જે વધે તેને તેની પાસેના ડાબી તરફના અંક સ્થાનનું રૂપ કરવાને દશે ગુણી તે સ્થાનનો અંક ઉમેરી તેને બાજકે ભાગવા જોઈએ. દશે ગુણવાથી તે ગુણ્ય ઉપર એક મીડું આવે છે ને તેમાં તે સ્થાનનો અંક ઉમેરવાથી મીડાની જગાએ તે અંક આવેછે. આ પ્રમાણે કરતું સહેલું પડેછે. પણ જો એકમથી ભાગતા જઈએ તો જે શેષ વધે તેને તેની પાસેના ડાબી તરફના અંક સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ભાગવા પડે એટલે અપૂર્ણાંક આવે. ને તેમાં તે સ્થાનનો અંક ઉમેરી ભાગવાથી અપૂર્ણાંક ભાગાકાર થશે. એ રીતે જેમ જેમ આગળ કરતા જઈશું તેમ તેમ અપૂર્ણાંક વધતો જશે, અને તેથી મુશ્કેલી પણ વધશે. વળી ભાગાકારમાં પણ ભારે અંકને ભાગતાં ભારે અંક આવશે અને તેના પછીનો તેથી દશ ગણો હલકો આવશે એટલે સંખ્યા લખવાના આપણા નિયમને અનુસરતું થશે. પણ એકમને ભાગતાં પ્રથમ એકમ, પછી દશક, એમ આઠવાથી ભાગાકારની સંખ્યા ગોઠવવામાં પણ અડચણ પડવાની. આ ખેવડી અડચણ પહેલી રીતે કરવામાં નડતી નથી, માટે ભાગાકાર ડાબી તરફથી શરૂ કરીએછીએ.

ભાગાકાર કરતાં એક એક અંક ચઢાવવાની રીતનું કારણ.

આપણે ઉપર કહી ગયા કે પ્રથમ ભારે સ્થાનના અંકને ભાગતાં શેષ વધે તેને તેની પાસેના હલકા સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ગુણી તે સ્થાનનો અંક ઉમેરવો જોઈએ; પણ દશે ગુણતાં ગુણ્ય ઉપર મીડું આવે છે ને તેમાં તે અંક ઉમેરવાથી મીડાની જગાએ ઉમેરવાનો આવે છે એટલે દશે નહિ ગુણતાં પાસેના સ્થાનનો અંક શેષ ઉપર જમણી તરફ એકદમ ચઢાવી દેઈએછીએ કેમકે તેથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી પણ જો શેષમાં પાણે વધી હોય તો દશે ગુણીનેજ તેની પાસેના હલકા સ્થાનનો અંક ઉમેરવો પડેછે.

અવયવ પાડીને ભાગાકાર કરીએ ત્યારે શેષ કેટલા વધ્યા તે જાણવાની રીતનું કારણ-જે બે અવયવ હોય તો બીજા અવયવે ભાગતાં જે શેષ વધ્યા હોય તેને પહેલા અવયવે ગુણી તેમાં પહેલા અવયવનો શેષ ઉમેર્યાથી ખરો શેષ આવશે. જે ત્રણ અવયવ હોય તો ત્રીજા અવયવના શેષ-ને બીજા અવયવે ગુણી તેમાં બીજા અવયવનો શેષ ઉમેરવો, ને તેને પહેલા અવયવે ગુણી તેનો શેષ ઉમેરવો. એટલે ખરો શેષ આવશે. કેમકે પહેલા અવયવે ભાગ્યાથી જે ભાગાકાર આવશે તે, તે અવયવ ગણો આવશે, તેને બીજા અવયવે ભાગ્યાથી વધેલો શેષ પહેલા અવયવ ગણો હોય માટે તેને સાદું રૂપ લાવવાને પહેલા અવયવ ગણા કરવા જોઈએ.

કોઈ સંખ્યાને શુન્યે ભાગીએ તો ભાગાકાર અનંત આવે તેનું કારણ-કોઈ સંખ્યાને એકે ભાગવાથી ભાગાકાર તેજ સંખ્યા આવે છે ને અરધે ભાગ્યાથી બમણા, પાંચે ભાગ્યાથી ચોગણા એ રીતે ભાજક જેટલા ગણો ઘટાડીએ તેટલા ગણો ભાગાકાર આવે છે તો ભાજક શુન્ય (જેની કોમત કાંઈ નથી) હોય તો ભાગાકાર અનંત આવે એ દેખીતું છે.

ગુણાકાર એ સરવાળાની ને ભાગાકાર એ બાદબાકીની સહેલી રીત છે.

ઉપરની ચાર રીતો ઉપરથી અંકગણિતના કેટલાક દાખલા કરવાને બીજી રીતો ઉત્પન્ન કરવી પડે છે. તે ઉપયોગી જાણી કારણ સહીત તે રીતો આ નીચે આપો છે.

કોઈ બે રકમેનો સરવાળો ને તેજ બે રકમેની બાદબાકી આપી હોય તો તે ઉપરથી એ બે રકમો કહાડવી હોય તો તે બે રકમેના સરવાળામાં બાદબાકી ઉમેરી બેએ ભાગવા એટલે બેમાંની એક મોટી રકમ આવશે, તે સરવાળામાંથી બાદ કર્યાથી નાની રકમ નીકળશે. અથવા આપેલા સરવાળામાંથી આપેલી બાદબાકી બાદ કરી, બેએ ભા-

ખાચી નાની રકમ નીકળશે, એ નાની રકમ સરવાળામાંથી બાદ કરવાથી મોટી રકમ નીકળશે.

કારણ.—બે સંખ્યાના સર્વાળામાં મોટી ને નાની બંને છે, માટે સરવાળો ને બાદબાકી ભેગાં કરીએ તો તે મોટીની બમણાઇ બરાબર થાય, એટલે તેને બે એ બાગવાથી મોટી નીકળે, તેમજ સરવાળામાંથી બાદબાકી બાદ કરીએ, તો બે નાની બરાબર થાય, માટે તેને બેએ ભાગ્યાથી નાની નીકળે. આદર ગણિતના નિયમો જાણનારા ઉપલી રીતોનું કારણ નીચલા સમિકરણ ઉપરથી જલદીથી સમજશે.

$$\text{મોટી} + \text{નાની} = \text{સરવાળો}$$

$$\text{મોટી} - \text{નાની} = \text{બાદબાકી}$$

$$\begin{array}{l} \text{સરવાળાથી} \\ \text{તો} \end{array} \quad \begin{array}{l} ૨ \text{ મોટી} = \text{સરવાળો} + \text{બાદબાકી} \\ \text{મોટી} = \text{સરવાળો} + \text{બાદબાકી} \end{array}$$

૨

$$\begin{array}{l} \text{તેમજ} \\ \text{મોટી} - \text{નાની} = \text{સરવાળો} \\ \text{મોટી} - \text{નાની} = \text{બાદબાકી} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{બાદબાકીથી} \\ \text{તો} \end{array} \quad \begin{array}{l} ૨ \text{ નાની} = \text{સરવાળો} - \text{બાદબાકી} \\ \text{નાની} = \text{સરવાળો} - \text{બાદબાકી} \end{array}$$

૨

ગુણ્ય, ગુણક અને ગુણાકાર એ ત્રણમાંથી કોઈ પણ બે પદ આપ્યાં હોય, તે ઉપરથી બાકીનું ત્રીજું પદ કહાડવાનું.

જો ગુણ્યને ગુણક આપ્યા હોય, તો રીત પ્રમાણે ગુણવાથી ગુણાકાર નીકળશે. પણ જો ગુણાકારને ગુણ્ય આપ્યા હોય તો ગુણાકારને ગુણ્યે ભાગ્યાથી ગુણક નીકળશે. ને ગુણાકારને ગુણક ભાગ્યા હોય તો ગુણાકારને ગુણકે ભાગ્યાથી ગુણ્ય નીકળશે.

કારણ.—ગુણ્યના ગુણક ગણો ગુણાકાર છે. માટે ગુણાકારના ગુણકગણા ભોજા કરવાથી ગુણ્ય, ને ગુણ્ય ગણા-ભોજા કરવાથી ગુણક નીકળે, એ દેખીતું છે.

ઉપરની રીત ઉપરથી નીચેના કોઠા નીકળેલા છે.

ગુણાકાર=ગુણ્ય×ગુણક. ગુણ્ય=ગુણાકાર÷ગુણક.

ગુણક=ગુણાકાર÷ગુણ્ય.

ભાજ્ય, ભાજક, ભાગાકાર ને શેષ, એ ચારમાંથી કોઈ પણ ત્રણવાનાં આપ્યાં હોય તો ચોથું પદ કહાડવાનું.—

જો ભાજ્યને ભાજક આપ્યા હોયતો ભાજ્યને ભાજકે ભાગવાથી ભાગાકાર ને શેષ બંને નીકળશે. પણ જો ભાગાકાર, ભાજકને શેષ આપેલા હોય તો ભાગાકાર ને ભાજકના ગુણાકારમાં શેષ ઉમેરવાથી ભાજ્ય આવશે. ને ભાગાકાર, ભાજ્યને શેષ આપ્યા હોયતો ભાજ્યમાંથી શેષ બાદ કરી ભાગાકારે ભાજ્યને ભાગવાથી ભાજક નીકળશે,

કારણ.—ભાજ્યને ભાજકે ભાગવાથી ભાગાકાર આવે છે, ને શેષ વધે છે, માટે ભાગાકારને ભાજકે ગુણી શેષ ઉમેરવાથી ભાજ્ય આવે. તેમજ ભાજ્યએ ભાગાકારને ભાજકના ગુણાકારમાં શેષ બિમેર્મા નેટલો છે, માટે ભાજ્યમાંથી શેષ બાદ કરી ભાગાકારે ભાગવાથી ભાજક આવશે.

ઉપરની રીત ઉપરથી નીચેના કોઠા નીકળેલા છે.

શેષ=ભાજ્ય-(ભાગાકાર×ભાજક)

ભાગાકાર=(ભાજ્ય-શેષ)÷ભાજક

ભાજક=ભાજ્ય-શેષ ÷ ભાગાકાર

ભાજ્ય=(ભાગાકાર×ભાજક)+શેષ.

દૃઢભાજક.

જો એક સંખ્યા, બીજી બેઅથવા વધારે સંખ્યામાંની દરેકને કાંઈ પણ શેષ વધ્યા સિવાય ભાગી શકે તો તે સંખ્યા બીજી સંખ્યાઓનો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક છે. એવો બે અથવા વધારે સંખ્યાઓનો જે મોટામાં મોટો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક તે દૃઢભાજક. જેમકે ૭૨, ૬૬, ૧૪૪,

એનો બે, ચાર, છ, ખાર, ચોવીશ, એ સાધારણ નિઃશેષ બાજક છે, પણ દહબાજક તો ચોવીશજ કહેવાય.

દહબાજકની રીતનું કારણ—આપેલી બે સંખ્યામાંની નાની સંખ્યા, મોટીનો નિઃશેષ બાજક હોય, તો તે નાની સંખ્યાજ બંને સંખ્યાનો દહબાજક થશે; પણ નાની સંખ્યા, મોટીનો નિઃશેષ બાજક ન હોય, ને જે શેષ વધે, તે નાની સંખ્યાનો નિઃશેષ બાજક હોય, તો તે શેષ નાની સંખ્યા ને મોટી સંખ્યાનો નિઃશેષ બાજક થશે, એટલે દહબાજક થશે. કેમકે જે શેષ નાની સંખ્યાને નિઃશેષ બાગી શકે છે, તો તે નાની સંખ્યાના અમૂક ગણાને પણ બાગી શકે છે. અથવા તેમાં શેષ ઉમેરીએ તેને પણ નિઃશેષ બાગી શકે છે. હવે મોટી સંખ્યા તે નાની સંખ્યાવત્તા શેષ, અથવા નાની સંખ્યાના અમૂક ગણા, વત્તા શેષની બરાબર છે. માટે નાની સંખ્યાએ મોટી સંખ્યાને બાગતાં વધેલો શેષ, જે નાની સંખ્યાને નિઃશેષ બાગી શકે, તો તે મોટી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ બાગી શકે, એટલે એ શેષજ આપેલી બંને સંખ્યાનો દહબાજક થશે. પણ જે તે શેષ (પહેલો શેષ) નાની સંખ્યાને નિઃશેષ બાગી ન શકે, ને શેષ વધે, તો એ બીજો શેષ પહેલા શેષને નિઃશેષ બાગી શકે છે કે નહિ, તે જોવું. જે બાગી શકે, તો એ બીજો શેષ, આપેલી બંને સંખ્યાનો પણ નિઃશેષ બાજક થશે. કેમકે નાની સંખ્યા એ પહેલા શેષમાં બીજો શેષ ઉમેરીથી જે આવે તેટલી, અથવા પહેલા શેષના અમૂક ગણાવત્તા બીજા શેષ જેટલી છે. અને મોટી સંખ્યા, એ નાની સંખ્યા, અથવા નાની સંખ્યાના અમૂક ગણાવત્તા પહેલા શેષ જેટલી છે. જેમકે:—

૨૪ અને ૫૭ તો દહ બાજક કહેવો હોય તો.

આમાં ૯ પહેલો, ૬ બીજો ૨૪|૫૭|૨
 અને ત્રણ એ ત્રીજો શેષછે. હવે ૪૮
 જો ત્રણ છ ને નિઃશેષ ભાગી શ- ૬|૨૪|૨
 ક્યો તો તે નવને પણ ભાગી શક- ૧૮
 શો. કેમકે ત્રણ એ છ ને અને ત્રણ ૬/૬|૧
 ને નિઃશેષ ભાગી શકેછે; તો તે તે- ૬
 ના સરવાળાને પણ નિઃશેષ ભાગી ૩/૬|૨
 શકશે તેમજ ત્રણ જો નવને ભા- ૬
 ગી શકે, તો તે ૨૪ ને અને ૫૭ ૬
 ને પણ ભાગી શકશે, કેમકે ૨૪ એ બે વાર નવ+૬ ની

બરાબર છે. હવે જો ત્રણ એ નવને અને છને નિઃશેષ
 ભાગી શકેછે, તો તે નવના બમણા અને છના સરવાળાને
 પણ ભાગી શકેછે તેમજ ૫૭ એ બે વાર ચોવીસ+નવ છે ને
 ત્રણએ ચોવીસને અને નવને ભાગી શકે છે, તો તે બે વાર
 ચોવીસ+નવને એટલે ૫૭ને પણ ભાગી શકે છે તેથી ૨૪
 અને ૫૭ નો દૃઢ ભાજક ત્રણજ છે.

બે કરતાં વધારે સંખ્યાના દૃઢભાજકની રીતનું કારણ:-

જો ૨૪, ૫૪, ૬૯ એનો દૃઢભાજક કાઢવો હોય
 તો ૨૪ ને ૫૪ નો દૃઢભાજક ૬ આવશે અને છ અને
 ૬૯ નો ત્રણ આવશે; માટે એ ત્રણે સંખ્યાનો દૃઢભા-
 જક ત્રણ આવશે. કારણ કે ૨૪ અને ૫૪ નો દૃઢ ભાજક
 છ આવશે, પણ તે ૬૯ નો નિઃશેષ ભાજક નથી, માટે
 છ અને ૬૯ નો દૃઢભાજક ત્રણ આવ્યો, તેજ ૨૪ અને
 ૫૪ નો પણ દૃઢભાજક થશે, કેમકે જે છ નો નિઃશેષ
 ભાજક હોય, તે છ ના સાધારણ નિઃશેષ ભાજ્ય ૨૪ અને
 ૫૪ નો પણ નિઃશેષ ભાજક થવાનો. *

સાલશંકરના નવા અંકગણિતના ૧૨ માં મનોયત્નનો
 ૧૦ મો દાખલો દૃઢભાજકની રીતે શાધી કરવો, તે આ
 ઉપર લગાડ વિચાર કરવાથી સમજાશે.

કોઈ સંખ્યાના નિઃશેષ ભાજક શોધી કહાડવાની રીત ને કારણ.

કોઈ સંખ્યાને છેડે એક મીડું હોય તો દશે, જે મીડું હોય તો સોએ અને ત્રણ મીડું હોય તો હજારે તેને નિશેષ ભાગી શકાશે. કેમકે તે સંખ્યા એ ભાજ્ય અને દશ, સો, હજાર, એ ભાજક છે; ને ભાજકને ભાગાકારનો ગુણાકાર ભાજ્ય છે. ગુણાકારમાં ગુણ્યને ગુણકનાં મીડું ગુણાકાર ઉપરજ આવેછે. માટે ગુણાકારમાં (ભાજ્યમાં) જેટલાં મીડું હોય તેટલાં મીડું ગુણ્યમાં (ભાજકમાં) હોય તો ગુણકમાં (ભાગાકારમાં) મીડું હોય નહીં. એટલે તે સંખ્યામાંથી મીડું બાદ કરતાં યાકી રહશે તે ભાગાકાર આવશે. આ ઉપરથી ઉપરનું કારણ સમજાશે.

જે સંખ્યાને છેડે એકમ બેકી હોય અથવા શુન્ય હોય તે સંખ્યાને બેએ નિઃશેષ ભાગી શકાશે કારણ કે દશક, શતક, ઈત્યાદિ અંકોને બેએ નિઃશેષ ભગાય છે; ને જો એકમને બેએ નિઃશેષ ભગાયતો તે આખી સંખ્યાને બેએ નિઃશેષ ભાગી શકાશે. ને બેકી એકમને બે નિઃશેષ ભાગી શકે છે, માટે આખી સંખ્યાનો બે નિઃશેષ ભાજક થશે.

કોઈ સંખ્યાના દશકને એકમના અંકોને ચાર અને પચીસ નિઃશેષ ભાગી શકે તો તે આખી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકશે. કેમકે ચાર અને પચીસ એ સો, હજાર, દશહજાર, એ અંકોને તો નિઃશેષ ભાગે છેજ. એટલે જો તે સંખ્યાના છેલ્લા બે અંક (દશક ને એકમ)ને ચાર અને પચીસ નિઃશેષ ભાગી શકતા હોય તો તે આખી સંખ્યાનાં પણ નિઃશેષ ભાજક થશે.

કોઈ સંખ્યાનો એકમ પાંચ હોય અથવા એકમની જગ્યાએ શુન્ય હોય તો તે સંખ્યાનો પાંચ એ નિઃશેષ

ભાજક થશે, કેમકે પાંચ એ દશક, શતક ઇત્યાદિને તો નિઃ-
શેષ ભાગે છેજ.

કોઈ સંખ્યાના છેલ્લા ત્રણ અંકોને આઠ અને એકસો પચીશ નિઃશેષ ભાગી શકશે, તો તે આખી સંખ્યાને પણ નિઃશેષ ભાગી શકશે. કેમકે હજાર, દશહજાર ઇત્યાદિ અંકોને તો આઠ અને એકસો પચીશ નિઃશેષ ભાગે છેજ.

કોઈ સંખ્યાના બધા અંકોના સરવાળાને ત્રણે અથવા નવે † નિઃશેષ ભાગતા હોય તો તે આખી સંખ્યાને પણ ત્રણે અથવા નવે નિઃશેષ ભાગાશે. કારણ કે કોઈ એકમને ત્રણે અથવા નવે ભાગતાં જેટલા શેષ વધે, તેટલાજ તેના ઉપર ગમે તેટલાં મીઠાં ચઢાવીને ભાગ્યાથી પણ વધશે. ૪ ને ત્રણે ભાગતાં એક વધે છે, તો ૪૦, ૪૦૦ ઇત્યાદિને ભાગતાં પણ એક વધશે. પાંચને ભાગતાં બે વધે છે તો ૫૦ને ૫૦૦ને ભાગતાં પણ બેજ વધવાના. ચારને ત્રણે ભાગતાં એક વધે છે, તો ૪૧ને ભાગતાં બે વધશે ને ૪૨ને ભાગતાં શૂન્ય વધશે, કેમકે ચારને ભાગતાં એક વધે છે તેમ બેને ભાગતાં એક ખૂટે છે. તેમજ પાંચને ત્રણે ભાગતાં બે વધે છે, તો ૫૦૧ને ભાગતાં કોઈ નહીં વધે, કેમકે પાંચને ભાગતાં બે વધ્યા તેમ પાંચસોને ભાગતાં પણ બે વધશે ને એકને ભાગતાં બે ખૂટેશે, એટલે બરાબર ભણ રહેશે. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઈ સંખ્યાના અંકોના સરવાળાને ત્રણે નિઃશેષ ભાગાશે, તો તે આખી

† નવના એ ગુણને કીધે કોઈ સંખ્યાના અંકોના સરવાળાને નવે ભાગતાં જેટલા વધે તેટલા તે સંખ્યામાંથી બાદ કરવાથી નવે નિઃશેષ ભાગાશે, અથવા તે વધારામાં નવ કે નવના અમૂક ગણ્યા બાદ કરી નવે ભાગવાથી પણ નિઃશેષ ભાગાશે. તેમજ તે સંખ્યામાંથી તે સંખ્યાના અંકોને ગમે તેમ ફેરવ્યાથી જે સંખ્યા થાય તે બાદ કરે તો તે બાદબાકીને પણ નવે નિઃશેષ ભાગી શકાશે.

સંખ્યાને પણ ભાગી શકાશે. ત્રણનાઉપરથી નવનું કારણ પણ સમજાશે, કેમકે જે ત્રણનું કારણ છે તેજ નવનું કારણ છે.

જે સંખ્યાને ત્રણ નિઃશેષ ભાગી શકે તે સંખ્યાનો એકમ બેકી હોય તો તેને છએ પણ નિઃશેષ ભાગી શકાશે, કેમકે છેવટ એકીવાળી જે સંખ્યાને ત્રણ નિઃશેષ ભાગી શકે, તે સંખ્યાના બમણાને ત્રણથી બમણા છ પણ નિઃશેષ ભાગી શકે એ દેખીતું છે, ને એકી એકમવાળી સંખ્યાને બમણી કરવાથી બેકી એકમ વાળી સંખ્યા થશે તેથી ઉપલો નિયમ નીકળ્યો છે.

કોઇ સંખ્યાના એકી સ્થળોના અંકોનો સરવાળો બેકી સ્થળોના અંકોના સરવાળા બરાબર હોય અથવા એ બે સરવાળાના અંતરને અગીઆરે નિઃશેષ ભાગતા હોય તો તે આખી સંખ્યાને અગીઆરે નિઃશેષ ભાગી શકાશે.

કારણ.—આ નિયમનું કારણ ત્રણને નવના કારણને મળતુંજ છે. એકમ, શતક, દશહજાર ઇત્યાદિ એકી સ્થળો અને દશક, હજાર, લાખ એ બેકી સ્થળો છે.

કોઇ દશકને અગીઆરે ભાગતાં જેટલા ખૂટે છે તેટલાજ તેટલા શતકને ભાગતાં વધે છે, જેમકે બે દશક ૨૦ ને અગિઆરે ભાગતાં બે ખૂટે સારે ૨૦૦ ને અગિઆરે ભાગતાં બે વધે એટલે ૨૨૦ ને અગિઆર નિઃશેષ ભાગી શકે. તેમજ જેટલા હજારને અગિઆરે ભાગતાં જેટલા ખૂટે છે તેટલાજ તેટલા દશહજારને ભાગતાં વધે છે. જેમકે ૧૦૦૦ ને અગિઆરે ભાગતાં એક ખૂટે સારે ૧૦૦૦૦ ને અગિઆરે ભાગતાં એક વધે એટલે ૧૧૨૨૦ ને અગિઆર નિઃશેષ ભાગી શકે. ને દશક, હજાર ઇત્યાદિ એકી સ્થળોને સો, દશહજાર ઇત્યાદિ બેકી સ્થળો છે માટે, એકી સ્થળોને અગિઆરે ભાગતાં જેટલી વધ થાય છે તેટલી બેકી સ્થળોને અગિઆરે ભાગતાં ઘટ જાય છે, તેથી બરાબર થઇ રહે છે. જે-

મકે ૪૭૬૭૪ આ સંખ્યામાં $૪૦૦૦૦+૬૦૦+૪$ એ દરેક એકો સ્થળને અગિયારે ભાગતાં ચૈદ વધે છે ત્યારે $૭૦૦૦+૭૦$ એ દરેક એકો સ્થળને અગિયારે ભાગતાં ચૈદ ઘટે છે તેથી ખરાબર થઈ રહે છે. માટે એ આખી સંખ્યાને અગિયાર નિઃશેષ ભાગી શકશે અને એજ ઉપરથી ઉપલો નિયમ નીકળેલો છે.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય.

એ અથવા વધારે સંખ્યાઓનો નાનામાં નાનો સાધારણ ભાજ્ય તે, તે સંખ્યાઓનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહેવાય. જેમકે ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ આ સંખ્યાઓનો રીત પ્રમાણે ગણવાથી ૧૨૬૦ લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય આવશે.

| | |
|---|----------------|
| ૨ | ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ |
| ૨ | ૯, ૧૪, ૧૫, ૨૧ |
| ૩ | ૯, ૭, ૧૫, ૨૧ |
| ૭ | ૩, ૭, ૫, ૭ |
| | ૩, ૧, ૫, ૧ |

આમાં ૨, ૨, ૩, ૭, ૩, ૫ એ અવયવોનો ગુણાકાર કરવાથી ૧૨૬૦ આવશે.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવાની રીતનું કારણ.

$૧૮=૨ \times ૩ \times ૩$, $૨૮=૨ \times ૨ \times ૭$, $૩૦=૨ \times ૩ \times ૫$ ને $૪૨=૨ \times ૩ \times ૭$ એ અવયવોથી થએલી છે. તે ઉપરથી માલમ પડે છે કે ૧૮ને ૨૮નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય $૨ \times ૨ \times ૩ \times ૩ \times ૭$ થી થવો જાઈએ; અને એ અવયવો વડેજ $૨ \times ૩ \times ૩$ અથવા ૧૮ અને $૨ \times ૨ \times ૭$ અથવા ૨૮ છે તેથી ૧૮ને ૨૮નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય, $૨ \times ૨ \times ૩ \times ૩ \times ૭$ એ સાધારણ અવયવોથીજ થવો જોઈએ, કેમકે એ અવયવો વડેજ $૨ \times ૩ \times ૩$ અથવા ૧૮, $૨ \times ૨ \times ૭$ અથવા ૨૮ થયા છે અને $૨ \times ૩ \times ૫$ એ ૩૦ના અવયવ છે તેથી $૨ \times ૨ \times ૩ \times ૩ \times ૭ \times ૫ = ૧૮, ૨૮$ ને ૩૦નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય થશે અને

૨૪૩૪૭ એ ૪૨ ના અવયવ છે માટે ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૨૪૨૪૩૪૩૪૭૪૫ એજ સાધારણ અવયવોથી થવો જોઈએ કેમકે એ અવયવો પંડેજ ૨૪૩૪૩ અથવા ૧૮, ૨૪૨૪૭ અથવા ૨૮, ૨૪૩૪૫ અથવા ૩૦ ને ૨૪૩૪૭ અથવા ૪૨ ના છે તેથી ૨૪૨૪૩૪૩૪૭૪૫ એ ૧૮, ૨૮, ૩૦, ૪૨ ના લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્યના અવયવો છે માટે તેમનો ગુણાકાર ૧૨૬૦ એજ એ ચારે સંખ્યાનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય છે.

દૃઢભાજક અને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ઉપરથી કેટલીક રીતો થએલી છે તે ઉપયોગી જાણી કારણ સાથે નીચે લખી છે.

એ રકમોનો દૃઢભાજક અને તેજ એ રકમોનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય આપેલો હોય, અને એ બેમાંથી એક રકમ આપી હોય, તો બીજી રકમ કાઢાડવાનું.—

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય અને દૃઢભાજકનો ગુણાકાર કરી આપેલી એક સંખ્યાએ ભાગ્યાથી બીજી સંખ્યા નીકળશે કેમકે—દૃઢભાજક એ બંને સંખ્યાનો મોટામાં મોટો સાધારણ નિઃશેષ ભાજક હોવાથી તે બે સંખ્યાના ગુણાકાર કરતાં લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય, દૃઢભાજક ગણો ઓછો આવશે. માટે આપેલા લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્યને દૃઢભાજક ગણા કરવાથી તે બે સંખ્યાનો ગુણાકાર આવશે. એટલે જવાબ સંખ્યા \div આપેલી સંખ્યા = દૃઢભાજક \times લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય થયો. માટે જવાબ = (દૃઢભાજક \times લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય) \div આપેલી સંખ્યા. જેમકે બે રકમોનો દૃઢભાજક ૩ અને લઘુ. સા. ભાજ્ય ૬૦ ને બેમાંની એક સંખ્યા ૧૫ છે તો બીજી સંખ્યા કેટલી? તો— $૬૦ \times ૩ = ૧૮૦$ એ બે સંખ્યાનો ગુણાકાર, માટે $૧૮૦ \div ૧૫ = ૧૨$ એ જવાબ.

તાબો—૧૨ ને ૧૫. નો દૃઢભાજક ૩, છે, ને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૬૦ છે.

$$\begin{array}{r}
 ૧૨ \overline{) ૧૫} ૧ \\
 \underline{૧૨} \\
 ૩ \overline{) ૧૨} ૪ \\
 \underline{૧૨} \\
 ૦
 \end{array}$$

$$૩ \overline{) ૧૨} - ૧૫$$

$$૪ \times ૫ \times ૩ = ૬૦ \text{ આમાં } ૬૦$$

એ, બે સંખ્યાના ગુણાકાર ૧૮૦ થી, દરબાજક ૩ ગણા ઓછા છે, કેમ કે ત્રણે ૧૨ ને ૧૫ બંનેને ભાગેલા છે.

અપૂર્ણાંકોનો દરબાજક અને લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવાનું.—

દરબાજક—કોઈપણ બે અપૂર્ણાંકોનો દરબાજક કહાડવો હોય તો અંશ અંશનો અને છેદ છેદનો દરબાજક કહાડી, અંશનો દરબાજક અંશ સ્થળે અને છેદનો દરબાજક છેદ સ્થળે લખવો. જેમકે $\frac{૩}{૪}$ અને $\frac{૧}{૬}$ નો દરબાજક કહાડવો હોય તો ૨૫ અને ૧૫ એ અંશનો દરબાજક, ૫ એ અંશ સ્થળે, અને ૪ ને ૬ એ છેદનો દરબાજક ૨ છેદ સ્થળે લખવાથી $\frac{૫}{૬}$ એ જવાબ. એનું કારણ ઉઘાડુંજ છે. પરંતુ જો અપૂર્ણાંકોના અંશનો દરબાજક એક હોય એટલે અંશો અસ્પર્શ અવિભાજ્ય હોય તો તે અપૂર્ણાંકોનો સમન્વેદ કર્યા પછી ઉપરની રીતે અંશ અને છેદનો દરબાજક કહાડવો. જેમકે $\frac{૩}{૪}$ ને $\frac{૧}{૬}$ નો દરબાજક કહાડવો હોય તો સમન્વેદ કર્યાથી $\frac{૬}{૬}$ ને $\frac{૧}{૬}$ આવ્યા તેનો ઉપરની રીતે દરબાજક કહાડવાથી $\frac{૬}{૬}$ આવ્યા એ જવાબ.

લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય—અપૂર્ણાંકોનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો હોય તો તે અપૂર્ણાંકોનો સમન્વેદ કર્યા પછી અંશ અંશનો અને છેદ છેદનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો, અંશને અંશસ્થળે, અને છેદને છેદ સ્થળે લખવા. જેમકે $\frac{૩}{૪}$ અને $\frac{૧}{૬}$ નો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો હોય તો સમન્વેદ કર્યાથી $\frac{૬}{૬}$ ને $\frac{૧}{૬}$ આવ્યા, પછી અંશનો લઘુત્તમ સાધારણ ભાજ્ય ૬૦ અને છેદનો ૧૨ આવ્યો એટલે $\frac{૬}{૬}$ અથવા $\frac{૧}{૬}$ એ જવાબ.

આણપાણના અપૂર્ણાંક.

આણપાણના ભાગાકારમાં શેષ પાણો આવે તો તે શેષને દશે ગુણી આગલો અંક ઉમેરીએ છીએ તેનું કારણ.—સાદા ભાગાકારમાં શેષ પાણો આવતી નથી, તેથી શેષમાં આગલો અંક ઉમેરવાને દશે ગુણ્યા વગર આગલો અંક ચઢાવીએ છીએ તોપણ આગ્રેછે, પણ ન્યારે શેષમાં પાણો હોય ત્યારે આગલો અંક ઉમેરવાને તે પાણો વાળા શેષને તે ઉમેરવાના અંક સ્થાનનું રૂપ આપવાને દશે ગુણવા જો-
ઈએ કેમકે શેષનું અંકસ્થાન ઉમેરવાના અંકસ્થાન કરતાં દશગણું વધારે હોયછે—આ કારણ પાછળ ભાગાકારના કારણમાં પણ સમજાવી ગયા છીએ.

આણપાણના ભાગાકારમાં કોઈવાર દશે કે તેથી વધારેએ ભાગ ચલાવવો પડેછે, ને સાદા ભાગાકારમાં તેમ કરવું પડતું નથી, તેનું કારણ—સાદા ભાગાકારમાં વધારેમાં વધારે અંકે ભાગ કઢાડયાથી જે શેષ વધે છે તે ભાજક કરતાં ઓછામાં ઓછો એક ઓછા જેટલો હોયછે, ને આગલા ઉમેરવાના અંકની કિંમત તેની પહેલાના સ્થાનના એક જેટલી હોતી નથી. તેથી શેષને દશે ગુણી આગલો અંક ઉમેરવાથી પણ દશે ભાગ ચાલી શકતો નથી, પણ આણપાણના ભાગાકારમાં તો ભાજ્યની સંખ્યા માંડવામાં દરેક અંકસ્થાનમાં આખા અંક લખાયછે ને પાણો લખાતી નથી, તેથી કોઈવાર આગલા અંકમાંથી શેષના સ્થાનમાં પાણો આવી શક્તી હોય, ને તે પાણો હોવાથી વધારે ભાગાકાર નીકળે તો હોય તો ભાજ્યમાં પાણો નહીં મૂકવાના કારણથી આગલો ભાગ દશે કે તેથી વધારે અંકે કઢાડવો પડે. દાખલો લીધાથી આ કારણ જણદી સમજાશે, જેમકે.

| | |
|--------------|-----------|
| ૧૨૧૭૩૬૧૧ (૫ | |
| <u>૬૧૧</u> | <u>૧૦</u> |
| ૧૧૧૧ | ૬૦ |
| <u>૧૦</u> | |
| ૧૧૭૧ | |
| <u>૬૧૧</u> | |
| ૧૨૪ | |
| <u>૧૨૨૧</u> | |
| ૧૧ | |

આમાં બીજા ભાગ દશે કહાડવો પડ્યો, કેમકે પાંચે ભાગ કહાડવો ત્યારે ૭૩ માંથી ૬૧૧ જતાં ૧૧૧૧ વધ્યા, પણ ૭૩ને બદલે ૭૩૧ હોત તો ૬ એજ ભાગ જાત, અને છ એકમમાં અરધો દશક રહેલો છે એટલે ખરેખરી એ સંખ્યા ૭૩૧ દશક અને ૧૧ એકમ છે, તેથી છ એ ભાગ જોવા જાઈએ. પરંતુ

આણપાણના ભાગાકારમાં પણ ભાજ્યની વચમાં પાણી મૂકવાનો આપણામાં રીવાજ નથી. તેથી જો ભાગ છએ જવો જોઈતો હતો તે પાંચે કહાડવાથી એકમ સ્થાને દશે ભાગ કહાડવો પડ્યો છે.

વ્યવહારી અપૂર્ણાંક.

ભાગાનુંબંધપૂર્ણાંક ને વિષમ અપૂર્ણાંકનું ૩૫ આપવાની રીતનું કારણ-પૂર્ણાંકને અપૂર્ણાંકના છેદે ગુણી અંશ ઉમેરવા, ને તેને અંશસ્થાને લખી તે અપૂર્ણાંકના છેદને છેદ સ્થળે લખવા. જેમકે $3\frac{3}{4} = \frac{3 \times 4 + 3}{4} = \frac{15}{4}$ કેમકે $3\frac{3}{4}$ એટલે ત્રણ આખાને ત્રણ પાવલાં મળીને એ અપૂર્ણાંક થયેલો છે. હવે ત્રણ આખાના પાવલાં કરીએ તો બાર થાય, ને ત્રણ પાવલાં હતાં તે સાથે કુલ ૧૫ પાવલાં અથવા $\frac{15}{4}$ થયા.

વિષમ અપૂર્ણાંકને ભાગાનુંબંધપૂર્ણાંકનું ૩૫ આપવું હોય તો અંશને છેદે ભાગી ભાગાકાર આવે તે પૂર્ણાંક ને શેષ વધે તે અંશમાં લખી છેદને છેદમાં લખવા-જેમકે $3\frac{3}{4}$ અથવા ૧૫ ચોથા ભાગ છે તેમાંથી ૩ આખાને ૩ ચોથા ભાગ નીકળ્યા એટલે $3\frac{3}{4}$ જવાબ. આનું કારણ ઉપર આવી ગયું છે.

કાંઈ અપૂર્ણાંકને પૂર્ણાંકે ગુણવાની રીત ને કારણ-અપૂર્ણાંકના અંશને પૂર્ણાંકે ગુણી અંશસ્થાને લખી જો છેદ હોય તે છેદ સ્થાને લખવો, અથવા જો છેદને પૂર્ણાંકે ભગાતા હોય

તો ભાગી જે ભાગાકાર આવે તેને છેદમાં ને અપૂર્ણાંકના અંશને અંશસ્થળે લખવા એ જવાબ. જેમકે $\frac{૩}{૮}$ ને બેએ ગુણુવા હોય તો $\frac{૩}{૮} \times ૨ = \frac{૩ \times ૨}{૮} = \frac{૬}{૮}$ અથવા $\frac{૩}{૮} \div \frac{૧}{૨} = \frac{૩}{૪}$ એ જવાબ. કારણ કે $\frac{૩}{૮}$ એ કોઈ વસ્તુના આઠ ભાગ કરીએ તેમાંથી ત્રણ ભાગ લઈએ તેની બરાબર છે અને એવા છ ભાગ લઈએ તો ત્રણ ભાગ કરતાં તે બમણા થાય એ દેખીતું છે. અથવા કોઈ વસ્તુના ચાર ભાગ કરી તેમાંના ત્રણ ભાગ લઈએ તે, તેજ વસ્તુના આઠ ભાગ કરી તેમાંના ત્રણ ભાગ લઈએ તે કરતાં બમણાજ થશે કેમકે લીધેલા ભાગની સંખ્યા સરખી છે, પણ બીજીવારના ભાગમાંના દરેક કરતાં પહેલી વારમાંના દરેક ભાગ બમણો મોટો છે.

કોઈ અપૂર્ણાંકને પૂર્ણાંકે ભાગવાની રીત ને કારણ-અપૂર્ણાંકના અંશને પૂર્ણાંકે ભગાતા હોય તો ભાગી અંશમાં ને આપેલા છેદને છેદમાં લખવો અથવા અપૂર્ણાંકના છેદને પૂર્ણાંકે ગુણી તેને છેદમાં અને આપેલા અંશને અંશમાં લખવો એ જવાબ. જેમકે $\frac{૩}{૮}$ ને બે એ ભાગવા હોય તો $\frac{૩}{૮} \div \frac{૧}{૨} = \frac{૩}{૪}$ અથવા $\frac{૩}{૮} \div \frac{૧}{૨} = \frac{૩}{૪}$ કારણ કે $\frac{૩}{૮}$ એટલે એક વસ્તુના આઠ સરખા ભાગમાંના છ ભાગ છે તેના બે ભાગ કરવા હોય તો દરેક ભાગ ત્રણ આઠમા ભાગનો આવશે. એટલે $\frac{૩}{૪}$ આવશે અથવા તે વસ્તુના આઠ ભાગ છે, તે દરેક ભાગના બે ભાગ એટલે કુલ ૧૬ ભાગ કર્યા તો એમાંનો દરેક ભાગ તે આઠ ભાગમાંના દરેક ભાગ કરતાં અરધો થશે. માટે આઠ ભાગમાંના છ ભાગ કરતાં સોળ ભાગમાંના છ ભાગ અરધા થશે.

“ કોઈ અપૂર્ણાંકના અંશને અને છેદને કોઈ રકમે ગુણીએ અથવા ભાગીએ તો તેની કીમતમાં ફેર પડશે નહીં તેનું કારણ-ઉપરના કારણ પ્રમાણે કોઈ અપૂર્ણાંકના અંશને કોઈ સંખ્યાએ ગુણીએ તો તેટલા ગણી તે અપૂર્ણાંકની કીમત વધે

છે, અને તેજ અપૂર્ણાંકના છેદને જો તેજ સંખ્યાએ ગુણી-
એ તો તે અપૂર્ણાંકની તેટલા ગણી કિંમત ધટે છે. એ-
ટલે અંશને કોઈ રકમે ગુણવાથી જેટલા ગણી કિંમત વધે
તેટલાજ ગણી કિંમત છેદને તેજ રકમે ગુણવાથી ધટે; તેથી
કિંમતમાં ફેર પડતો નથી. તેમજ કોઈ અપૂર્ણાંકના અં-
શને કોઈ રકમે ભાગીએ તો તેટલા ગણી કિંમત ધટે છે.
અને તે અપૂર્ણાંકના છેદને તેજ રકમે ભાગીએ તો તેટલા ગણી
કિંમત વધે છે, એટલે અંશને કોઈ રકમે ભાગવાથી જેટલા
ગણી કિંમત ધટે, તેટલાજ ગણી કિંમત છેદને તે રકમે ભાગવા-
થી વધે છે, તેથી તે અપૂર્ણાંકની કિંમતમાં ફેર પડતો નથી.

ઉપરનાજ કારણને લીધે અપૂર્ણાંકનો અતિસંક્ષેપ
કરવાથી પણ કિંમતમાં ફેર પડતો નથી કેમકે અતિસં-
ક્ષેપમાં અંશ અને છેદ બંનેને એકજ રકમે ભાગવી પડે છે.

પ્રભાગગતિ અપૂર્ણાંકમાં જેટલા અપૂર્ણાંક હોય, તે-
મના અંશોનો ગુણાકાર અંશ સ્થળે અને છેદોનો ગુણાકાર
છેદ સ્થળે લખવો. જેમકે કુના $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$ કારણ કે
ઉપર કલા પ્રમાણે કુનો $\frac{2}{3}$ અથવા એથી ભાગ $\frac{2}{3}$ થાય,
એવા ૩ ભાગ અથવા ૩ ગણા લખએ તો $\frac{2}{3}$ આવે.

મિશ્ર અપૂર્ણાંકમાં અંશ સ્થળના અપૂર્ણાંકના અંશ,
ને છેદ સ્થળના અપૂર્ણાંકના છેદનો ગુણાકાર અંશમાં, ને
અંશસ્થળના અપૂર્ણાંકના છેદ ને છેદ સ્થળના અપૂર્ણાંકના
અંશ એ બેનો ગુણાકાર છેદમાં લખવાથી સાદું અપૂર્ણાંક
આવે છે. જેમકે $\frac{2}{3} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$ જવાબ

કારણ કે—ઉપર કલા પ્રમાણે અંશ અને છેદ બંનેને

મારે શુધ્યા તો $\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ અંશને $3 \times 3 = \frac{2 \times 3}{3}$ અને $\frac{2}{3}$ છેદને

$૪૪ = \frac{૩}{૪} \times ૪ = ૩$ એટલે $\frac{૨}{૩} \times ૪$ હવે ફરીને $\frac{૨}{૩} \times ૪$ એ અંશને, અ-

ને ૩ છેદને ત્રણે ભાગ્યા તો $\frac{૨}{૩} \times ૪ \div ૩ = \frac{૨ \times ૪}{૩ \times ૩}$ અથવા $\frac{૮}{૯}$ આવ્યા
ને ૩ છેદને ત્રણે ભાગ્યા તો ૧ આવ્યો. પણ છેદમાં ૧ મૂ-
કવાથી કે નહિ મૂકવાથી કિંમતમાં ફેર પડતો નથી. માટે
 $\frac{૮}{૯}$ એ જવાબ.

અપૂર્ણાંકોનો સમઁછેદ કરવાની રીત ને કારણ.

કેટલાક અપૂર્ણાંકોનો લઘુતમ સમઁછેદ કરવો હોય
તો, તેમના છેદનો લઘુતમ સાધારણ ભાજ્ય કહાડવો. એ
બધા અપૂર્ણાંકોનો સમઁછેદ થશે, એ સમઁછેદને દરેક અપૂ-
ર્ણાંકના છેદે ભાગી, અંશે ગુણી તે ગુણાકાર દરેકના અંશ
સ્થળે લખવા એ જવાબ. જેમકે $\frac{૫}{૬}, \frac{૭}{૮}, \frac{૧૩}{૧૪}$ એનો લઘુતમ
સાધારણ ભાજ્ય ૨૮ છે. તેને દરેક અપૂર્ણાંકના છેદમાં લ-
ખી એ છેદને સાને ભાગી ૫ એ ગુણ્યા તો ૨૦, ૨૮ એ
ભાગીને સાને ગુણ્યા તો સાત, ને ચૌદે ભાગી ત્રણે ગુણ્યા
તો ૬ આવ્યા. એટલે $\frac{૨૦}{૬}, \frac{૭}{૮}, \frac{૧૩}{૧૪}$ એ સમઁછેદ થયો. એની
કિંમતમાં અને મૂળ અપૂર્ણાંકોની કિંમતમાં ફેર પડતો ન-
થી. કેમકે મૂળ અપૂર્ણાંકના અંશ કરતાં સમઁછેદનો અંશ જેટ-
લા ગણો વધેછે, તેટલાજ ગણો છેદ પણ વધે છે ને છેદને અને અં-
શને કોઈ એકજ રકમે ગુણવાથી કિંમતમાં ફેર પડતો નથી,
એ ઉપર આવી ગયું છે.

અપૂર્ણાંકોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરવાની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકોનો સર્વાળો કે બાદબાકી કરવી હોય ત્યારે
તે અપૂર્ણાંકોનો સમઁછેદ કરીને અંશોનો સરવાળો કે બાદ-
બાકી કરીએછીએ, ને સમઁછેદની સંખ્યા છેદમાં લખીએછીએ.
પણ છેદનો સરવાળો કે બાદબાકી કરતા નથી, કેમકે
સરવાળો કે બાદબાકી સઙ્ગતિય પદની સરખા મહત્વની ર-

ક્રમેની થાય. ૩. ૪-૨ આના એ નાણાની સંખ્યાતિય રકમો
 મો છે, પરંતુ સરખા મહત્વની નથી. તેથી એનો સરવાળો
 ૬ રૂપિયા કે છ આના થતો નથી, તેમજ $\frac{૩}{૬}$, અને $\frac{૫}{૬}$.
 રૂપિયાનો સરવાળો $\frac{૩}{૬} + \frac{૧૦}{૬} = \frac{૧૩}{૬}$ થાય પણ $\frac{૬}{૬}$ કે ૬ ન
 થાય. $\frac{૩}{૬}$ એટલે એક રૂપિયાના સોળભાગમાંના ત્રણભાગ
 અથવા ત્રણ આનામાં $\frac{૫}{૬}$ એટલે એક રૂપિયાના આઠભા-
 ગમાંના પાંચ ભાગ અગર પાંચ એઆનીઓ ઉમેરવી હોય
 તો ૮ એઆની કે ૮ આના ન થાય, માટે ૧ રૂપિયાના
 આઠમા ભાગ, અથવા બે આની છે, તેના સોળમા ભાગ
 અથવા આના કરવાને સમઁછેદ કર્યો તો પાંચ બે આની
 ના દશ આના થયા. તેમાં ત્રણ આના ઉમેર્યા, તો તેરઆ-
 ના અથવા એક રૂપિયાના ૧૩ સોળમા ભાગ $= \frac{૧૩}{૧૮}$ થયા.
 બાદબાકીનું પણ એજ કારણ છે, ને અપૂર્ણાંકના સર્વાળામાં
 છેદનો સર્વાળો કરતા નથી, કેમકે છેદનો માત્ર આખી કિં-
 મતના કેટલા ભાગ કરેલા છે, તેજ ખતાવે છે, પણ તે
 અપૂર્ણાંકની કિંમત તો તે ભાગમાંના કેટલા ભાગ લીધા
 છે, તે ઉપર એટલે અંશ ઉપર આધાર રાખે છે, તેથી અં-
 શોનોજ સર્વાળો થાય છે, જેમકે ઉપલાજ દાખલામાં $\frac{૧૩}{૧૮}$
 અથવા ૩ સોળમા ભાગને દશ સોળમા ભાગ અથવા $\frac{૧૦}{૧૮}$
 તો સર્વાળો. તેર સોળમા ભાગ અથવા $\frac{૧૩}{૧૮}$ થાય પણ $\frac{૧૩}{૧૮}$
 કે ૧૩ બીજીશમા ભાગ નહિ થાય.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકના ગુણાકારની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકનો ગુણાકાર કરવો હોય તો અંશે
 અંશનો અને છેદે છેદનો ગુણાકાર કરવો, કેમકે અપૂર્ણાંકને
 અપૂર્ણાંકે ગુણવા, એટલે એક અપૂર્ણાંકનો બીજા અપૂર્ણાંક
 જેટલો ભાગ લેવો એવો અર્થ છે. પ્રભાગ જાતિ અપૂર્ણાંકમાં
 પણ એજ પ્રમાણે હોય છે, એટલે પ્રભાગ જાતિ અપૂર્ણાંક-
 કમાં, અને અપૂર્ણાંકના ગુણાકારમાં ફેર નથી, તેથી પ્રભાગ

જાતિ અપૂર્ણાંકને સાદા અપૂર્ણાંકનું રૂપ આપવાની જે રીત અને કારણ કહ્યું, તેજ રીત અને કારણ અપૂર્ણાંકના ગુણાકારમાં પણ છે, જેગકે $\frac{૩}{૪}$ એ પ્રમાણ જાતિ અપૂર્ણાંકને $\frac{૩}{૪} \times \frac{૩}{૪}$ એ સરખાંજ છે, બંનેમાં $\frac{૩}{૪}$ જવાળ આવશે, પણ બંનેમાં સંક્ષેપ ઉડાડવો જોઈએ, એટલે ગુણાકારનું ટુંકું રૂપ કરવું જોઈએ. તેથી $\frac{૩}{૪}$ નું ટુંકું રૂપ કે સંક્ષેપ $\frac{૩}{૪}$ આવશે. કેમકે $\frac{૩}{૪}$ ને $\frac{૩}{૪}$ ની કિંમતમાં ફેર છે નહિ, કારણ કે અંશને છેદ બંનેને છ એ ભાગેલા છે.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકના ભાગાકારની રીતનું કારણ.

અપૂર્ણાંકે અપૂર્ણાંકનો ભાગાકાર કરવો હોય તો જે અપૂર્ણાંક ભાજક હોય, તેના અંશે ભાજ્ય અપૂર્ણાંકના છેદને, અને છેદે અંશને ગુણવા. અથવા ભાજક અપૂર્ણાંકના અંશને છેદ સ્થળે, ને છેદને અંશસ્થળે લખીને તેનો ભાજ્ય અપૂર્ણાંક સાથે ગુણાકારની રીતે ગુણાકાર કરવો. જેમકે $\frac{૩}{૪} \div \frac{૩}{૪} = \frac{૩}{૪} \times \frac{૪}{૩} = \frac{૩}{૩}$ આ જવાળ. કારણ કે પાછળ આવી ગયું કે ભાજક જે પ્રમાણે ધટે, તે પ્રમાણે ભાગાકાર વધારે આવે, ને ભાજક વધે તેમ ભાગાકાર ધટે, હવે $\frac{૩}{૩}$ ને $\frac{૩}{૩}$ એ ભાગવા એટલે $\frac{૩}{૩}$ ના ૪ ગણા કરવા. કેમકે ભાજક ૧ હોય તો ભાગાકાર $\frac{૩}{૩}$ આવે, પણ ભાજક ૪ ગણો ઓછો છે, માટે ભાગાકાર ૪ ગણો વધારે આવવો જોઈએ. એટલે $\frac{૩}{૩} \times ૪ = \frac{૩}{૩} \times ૪ = \frac{૩}{૩}$ આવે. હવે ભાજક $\frac{૩}{૩}$ ને બદલે ત્રણો, અથવા $\frac{૩}{૩}$ લખએ, તો ભાગાકાર $\frac{૩}{૩}$ થી ત્રણ ગણો ઓછો આવવો જોઈએ, એટલે $\frac{૩}{૩} \div ૩ = \frac{૩}{૩} \times \frac{૧}{૩} = \frac{૩}{૩}$ આવે. આથી સમજાશે કે $\frac{૩}{૩} \div \frac{૩}{૩} = \frac{૩}{૩} \times \frac{૪}{૩} = \frac{૩}{૩}$ સાચી આવ્યા. ભાજકને ઉલ્લેખીને ગુણવાની રીત આ ઉપરથી નીકળી છે.

દશાંશ અપૂર્ણાંક.

દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં તે અપૂર્ણાંક ઉપર જમણી તરફ રૂઠું રૂઠું વધારવાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી, પણ

હુ તે અપૂર્ણાંકના અંકોની ડાબી તરફ શૂન્ય મૂકવાથી દશગણી કીમત ઘટે છે તેનું કારણ— જમણી તરફ શૂન્ય વધારવાથી જેમ દશ ગણો અંશ વધે છે તેમ દેદ પણ દશ ગણો વધે છે, એટલે સંક્ષેપ કરવાથી તે અપૂર્ણાંકનું મૂળ ૩૫ આવી રહે છે, પણ ડાબી તરફ શૂન્ય વધારવાથી માત્ર છેદજ દશ ગણો વધે છે તેથી તેની મૂળ કીમત કરતાં દશ ગણી કીમત ઘટે છે. જેમકે. ૧ આની કીમત વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં $\frac{૧}{૧૦}$ છે હવે .૧ ઉપર જમણી તરફ શૂન્ય વધારવાથી .૧૦ થયા અને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં મૂકીએ તો $\frac{૧}{૧૦}$ આવે તેનો સંક્ષેપ કર્યાથી $\frac{૧}{૧૦}$ અથવા .૧ આવી રહે છે. પણ .૧ ની પાછળ મોડું મૂક્યાથી .૦૧ આવશે તેને વ્યવહારી અપૂર્ણાંકમાં મૂકીએ તો $\frac{૧}{૧૦}$ અથવા $\frac{૧}{૧૦}$ આવ્યા એટલે મૂળ છેદ કરતાં છેદ દશ ગણો થયો ને અંશ અને એ રહ્યાથી કીમત દશ ગણી ઘટી.

દશાંશ સર્વાવાળાની રીત ને કારણ—દશાંશ સરવાળામાં બધી સંખ્યા, દશાંશ ચિન્હ એક ઉભી સીધી લીટીમાં આવે તે રીતે મૂકી જમણા હાથ બણીના ઉભી સીધી હારના અંકોનો સરવાળો કરી તેમાંની વધે તેની પાસેના ડાબા હાથ બણીના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરીએ છીએ. અને એજ રીતે બધા અંકોનો સરવાળો કરીએ છીએ, કેમકે દશાંશ માંડવામાં દશાંશ ચિન્હ તે સંખ્યામાં દશાંશ અપૂર્ણાંકના અંકોની હદ ખતાવે છે. એ ચિન્હ પછીનો નજીકનો જમણા હાથ બણીનો અંક દશાંશનો, તેની પાસેનો જમણા હાથ બણીનો શતાંશનો, તેની પાસેનો સહસ્ત્રાંશનો ને તેની પાસેનો દશ સહસ્ત્રાંશનો છે. એ અંકો એક બીજાનીયે સત્તાતિય આવે માટે દશાંશ ચિન્હ ઉભી સીધી લીટીમાં આવે એ રીતે બધી સંખ્યા માંડીએ છીએ. દશાંશ સંખ્યાના અપૂર્ણાંકના અંકોની કીમત પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાની

પેઠે જમણા હાથ બણીના અંક કરતાં તેની પાસેના ડાબા હાથ બણીના અંકની કીમત દશ ગણી વધારે છે. માટે જમણા હાથ બણીના અંકનો સરવાળો કરી તેમાંની વધીતેની પાસેના ડાબા હાથ બણીના અંકોના સરવાળામાં ઉમેરીએ છીએ. છેવટે દશાંશ અંકોના સરવાળામાંથી જે વધી આવે તે પૂર્ણાંક થાય માટે તેને પૂર્ણાંક એકમના સરવાળામાં ઉમેરવામાં આવે છે. ૫ ને ૪ દશાંશનો સરવાળો $\frac{5}{10} + \frac{4}{10} = \frac{9}{10}$ આવે એટલે ૧ પૂર્ણાંકને ૩ થાય. સરવાળામાં ચિન્હ દશાંશ અંકોના સરવાળાની ને પૂર્ણાંક અંકોના સરવાળાની વચ્ચે આવે એ દેખીતું છે.

બાદબાકી પણ જમણા હાથ બણીથી પૂર્ણાંક સંખ્યાની બાદબાકીની રીતેજ કરવી. ને ચિન્હ સરવાળાની પેઠેજ મૂકવું. એનું કારણ ઉપર આવાં ગયું છે.

દશાંશ ગુણાકારની રીત ને કારણ—દશાંશ ગુણાકાર સાદા ગુણાકારની પેઠે કરી ગુણ્યને ગુણકના દશાંશના જેટલા આંકડા હોય તેટલા આંકડા ગુણાકારમાં કાપી ચિન્હ કરવાથી આવે છે. અને ગુણ્યને ગુણકના દશાંશ આંકડા જેટલા ગુણાકારમાં નહોય તો ખૂટે તેટલાં શીડાં તે ગુણાકારની પાછળ મૂકવાથી આવે છે. આનું કારણ હાખલાથી જલદી સમજાશે.

$1 \times 1 = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$ થાય છે. એને દશાંશનું ૩૫ આપીએ તો ૦.૦૧ આવે. તેમજ $1.1 \times 1.1 = \frac{11}{10} \times \frac{11}{10} = \frac{121}{100}$ અથવા $1\frac{21}{100}$ આવે એને દશાંશમાં મૂકીએ તો ૧.૨૧ થાય તે 1.1×1.1 નો ગુણાકાર ૧.૨૧ આવે, કેમકે ૧૨૧ ગુણાકાર માંથી ગુણ્યને ગુણક બંનેના મળીને દશાંશ બે આંકડા છે તે કાપવામાં આવે. આ ઉપરથી રીત કેમ નીકળી તે સમજાશે.

દશાંશ ભાગાકારની રીત ને કારણ—દશાંશ ભાગાકારમાં સાદા ભાગાકારની પેઠે ભાગાકાર કરીને ભાગ્યમાં

દશાંશના જેટલા આંકડા હોય તેમાંથી ભાજકના આંકડા બાદ કરી બાકી રહે તેટલા આંકડા કાપી ભાગાકારમાં ચિન્હ મૂકવું. પણ બાદબાકી કરતાં ભાગાકારમાં આંકડા ઓછા હોય તો જેટલા આંકડા ઓછા હોય તેટલાં ભાગાકારના અંકોની પાછળ મીંડાં મૂકીને તેની પહેલાં ચિન્હ કરવું. પણ જો ભાજ્યના દશાંશ અંક કરતાં ભાજકના દશાંશ અંક વધારે હોયતો તેટલાં મીંડાં ભાગાકારના અંક ઉપર જમણી તરફ વધારવાં. એ મીંડા સુધાંત આખી સંખ્યા પૂર્ણાંક આવશે કારણ—

ભાગાકારને ભાજકનો ગુણાકાર તે ભાજ્ય થાય માટે ભાજક ને ભાગાકારનાં દશાંશ સ્થળોના સરવાળા જેટલાં ભાજ્યમાંનાં દશાંશ સ્થળ હોય, તેથી ભાજ્યનાં દશાંશ સ્થળમાંથી ભાજકનાં દશાંશ સ્થળ બાદ કર્યાં તો બાકી રહ્યાં તેટલાં દશાંશ સ્થળ ભાગાકારમાં આવવાં જોઈએ, અને તેજ કારણથી ભાગાકારમાં તેટલા આંકડા ન હોય તો ભાગાકારના આંકડાની પહેલાં ખૂટતાં મીંડાં મૂકી દશાંશ આંકડા પૂરા કરવામાં આવે છે. કેમકે દશાંશમાં પહેલાં મીંડાં મૂકવાથી દશાંશ સ્થળ વધે છે ને છેલ્લાં મૂકવાથી વધતાં નથી કારણકે દશાંશમાં છેલ્લા મીંડાં વધાર્યાથી કીમતમાં ફેરફાર થતો નથી. પણ જો ભાજ્ય કરતાં ભાજકનાં દશાંશ સ્થળ વધારે હોય તો ભાગાકારના અંક ઉપર તેટલાં મીંડાં મૂકી તેને પૂર્ણાંક ગણવામાં આવે છે. કેમકે તે પ્રમાણે કરવાથી ભાગાકારને ભાજકનો ગુણાકાર ભાજ્યની બરાબર આવી રહે છે. અથવા ભાજકનાં વધારાનાં દશાંશ સ્થળ જેટલાં ભાજ્યનાં દશાંશ સ્થળમાં મીંડાં ચઢાવી ભાગ ચઢાવ્યાથી પણ ભાગાકારમાં તેટલા પૂર્ણાંક આંકડા વધારે આવે છે. વળી જેમ ભાજક નાનો હોય તેમ ભાગાકાર ઓટો આવવોજ જોઈએ, નહિતો ભાજકને ભાગાકારનો ગુણાકાર ભાજ્યની બરાબર થાય નહિ.

કોઈ વ્યવહારી સપૂર્ણાંકને દશાંશનું રૂપ આપવું હોય

તો તે અપૂર્ણાકના અંશને છેદે દશાંશ ભાગાકારની રીતે ભાગવા પડેછે, કેમકે વ્યવહારી અપૂર્ણાકમાં છેદ એ અંશનો ભાજક છે.

પૂનરાવર્ત દશાંશ.

અપૂર્ણાકને દશાંશનું રૂપ આપતાં અંતવાન દશાંશ આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ—કોઈ અપૂર્ણાકનો અતિ સંક્ષેપ કર્યા પછી જે છેદમાં બે, પાંચ કે તેમનો કોઈ ગુણાકાર કે તેમનો કોઈ ધાત કે ધાતોનો ગુણાકાર હોય તો તેને દશાંશનું રૂપ આપતાં અંતવાન આવશે, કેમકે દશાંશ રીતે અંશને છેદે ભાગતાં ભાજ્યમાં મીઠાં લેઈ શેષ ઉપર ચઢાવીએ છીએ, એટલે છેદના દશગણા, સો ગણા ઇત્યાદિ કરીએ છીએ. અને કોઈપણ રકમના દશગણા, સો ગણા ઇત્યાદિ કરવાથી બે, પાંચ, તેમનો કોઈ ગુણાકાર કે તેમનો કોઈ ધાત કે ધાતોનો ગુણાકાર નિઃશેષ ભાગી શકે છે, તેથી તે દશાંશ અંતવાન આવેછે,

અપૂર્ણાકને દશાંશનું રૂપ આપતાં શુદ્ધ પૂનરાવર્ત દશાંશ આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ—કોઈ અપૂર્ણાકનો અતિસંક્ષેપ કર્યા પછી જે તેના છેદમાં ૩, ૭, ૧૧, ૧૩, ૧૭ ઇત્યાદિ બેને પાંચ સિવાયની કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય કે કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યાનો ધાત કે, બે કે વધારે અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગુણાકાર હોય તો તેને દશાંશનું રૂપ આપતાં શુદ્ધ પૂનરાવર્ત દશાંશ આવશે. કેમકે વ્યવહારી અપૂર્ણાકને દશાંશનું રૂપ આપતાં શેષ ઉપર ચઢાવવાનો અંક મીઠુંજ હોયછે. મીઠું ચઢાવ્યાથી તે અંક દશ ગણો થાયછે. પણ દશને કે દશના અમુક ગણાને અવિભાજ્ય સંખ્યા નિઃશેષ ભાગી શકતી નથી; અને શેષ ભાજક કરતાં ઓછો આવવો જોઈએ તથા એકવાર વધેલો અંક ફરીને વધવો ન જોઈએ; એટલે ભાજ્યના મૂળ અંક જેટલો

શેષ વધે તે પછીના અંક, પહેલાં આવી ગયેલાજ આવવાના. કેમકે શેષ ઉપર પેહેલાં ચઢાવેલાજ અંક (મીંદું) ચઢાવવાના હોયછે અને તેથી ભાગાકારમાં પૂનરાવર્ત અંકની સંખ્યા પણ હમેશાં ભાજકના અંકડા કરતાં ઓછીજ હોવાની, કેમકે શેષમાં ભાજક કરતાં અંક ઓછો વધવાનો ને એકવાર વધેતો અંક ફરી વધવાનો નહિ તેથી વધારેમાં વધારે ભાજક કરતાં એક ઓછો એટલા અંકમાંથી દરેક અંક શેષમાં એકવાર આવવાનો એટલે ભાગાકારપણ ભાજકના અંક કરતાં એક ઓછો એટલીવાર જવાનો. જેમકે છેદમાં સાત હોયતો શેષમાં વધારેમાં વધારે છ સુધીના દરેક અંક એકવાર આવવાના, તેથી ભાગાકારમાં વધારેમાં વધારે છ અંકડા આવવાના.

મિશ્ર પુનરાવર્ત ક્યારે આવશે તે જાણવાની રીતનું કારણ — કોઈ અપૂર્ણાકના છેદમાં જે અથવા પાંચ કે તેમનો ગુણકાર, કોઈ ધાત કે ધાતોના ગુણકારનો ને કોઈ અવિભાજ્ય સંખ્યાનો ગુણકાર હોય, એટલે ઉપર કહેલા અંતવાન દશાંશ આવે એવા ને શુદ્ધ પૂનરાવર્ત દશાંશ આવે એવા અંકોનો ગુણકાર હોય તો તે અપૂર્ણાકને દશાંશનું રૂપ આપતાં મિશ્ર પૂનરાવર્ત આવશે કેમકે શેષને હમેશાં દશ મણા કરી ભાગાકાર કરવામાં આવેછે, ને એવી રકમને ઉપલા મિશ્ર ભાજકે ભાગવાથી મિશ્રપૂનરાવર્ત અંકોજ આવવા જોઈએ. કેમકે ભાજકના અવયવ પાડીએતો જે, પાંચ અને બીજી અવિભાજ્ય સંખ્યાઓ આવશે, હવે જેએ કે પાંચે ભાગવાથી નિઃશેષ ભાગાકાર આવશે, ને એ ભાગાકારને અવિભાજ્ય સંખ્યાએ ભાગવાથી પહેલા અંક અંતવાન આવ્યા પછીજ પુનરાવર્ત અંકો આવવાના. જેમકે ૬ ને દશાંશનું રૂપ આપતાં ૬ ના અવયવર ને ૩ પાડ્યા. ૧ને જેએ ભાગતાં. ૫ આવ્યા પણ તેને ત્રણે ભાગતાં મીંદું ચઢાવ્યા વગરજ એક અંક આવ્યો માટે તે અંતવાન થવાનો તે મીંદું

ચઢાવ્યા પછીના આંકડા પુનરાવર્ત આવવાના, કેમકે અ-
વિભાજ્ય સંખ્યા ભાજકમાં હોય તો જ્યારે ભાજ્ય ભાજક
કરતાં નાનો હોય ને તેને મીડું ચડાવી દશગણો કરીએ ત્યા-
રેજ પુનરાવર્ત દશાંશ આવેછે.

શુદ્ધ પુનરાવર્ત દશાંશને વ્યવાહારી અપૂર્ણાંકમાં
લાવવાની રીત ને કારણ—પુનરાવર્ત અંકને અંશમાં લ-
ખીને અંકોની સંખ્યા જેટલા નવડા છેદમાં લખી અતિ સં-
ક્ષેપ જતો હોય તો કાઢાડવો. કેમકે $\frac{૧}{૨}$ ને દશાંશનું $\frac{૫}{૧૦}$ આ-
પતાં એક પુનરાવર્ત, $\frac{૧}{૩}$ ના $\frac{૨}{૬}$, $\frac{૧}{૪}$ અથવા $\frac{૩}{૧૨}$ ના. ડંઈત્યા-
દિ આવે છે, માટે પુનરાવર્ત એક અંક હોય તો તેની નીચે
નવડો મૂકી અતિ સંક્ષેપ કર્યાથી વ્યવહારી અપૂર્ણાંક થશે.
પણ જો અંશમાં બે આંકડા હોય તો બે નવડાએ ભાગ્યા-
થી તેજ બે અંક પુનરાવર્ત આવેછે. જેમકે $\frac{૧૨}{૧૦૦}$ ને દશાં-
શનું $\frac{૧૨}{૧૦૦}$ આપતાં $\frac{૨૫}{૧૦૦}$ આવશે માટે $\frac{૨૫}{૧૦૦}$ ને વ્યવહારી અપૂર્ણાં-
કનું $\frac{૨૫}{૧૦૦}$ આપતાં $\frac{૨૫}{૧૦૦}$ ના છેદમાં બે નવડા આવવા જોઈએ.
એજ પ્રમાણે અંશમાં જેટલા અંક હોય તેટલા નવડા છે-
દમાં મૂક્યાથી તે પુનરાવર્ત દશાંશ આવી રહેછે.

મિશ્ર પુનરાવર્ત દશાંશને વ્યવહારી અપૂ-
ર્ણાંકનું $\frac{૧૨}{૧૦૦}$ આપવાની રીત ને કારણ—તે અપૂર્ણાંકને
જૂદા રાખી, અપૂર્ણાંકને આખી સંખ્યા ગણી તેમાંથી જે-
ટલા અંતવાન આંકડા હોય તેટલા બાદ કરવા, બાકી રહે
તે અંશમાં લખી છેદમાં જેટલા પુનરાવર્ત આંકડા હોય તેટ-
લા નવડા ને અંતવાન આંકડા જેટલાં તે નવડા ઉપર મીડાં
ચઢાવવાં પછી તેને પૂર્ણાંક સાથે મૂકવા એ આખું ભાગાનું
બંધ અપૂર્ણાંક થશે, અથવા પૂર્ણાંક સાથે આખી સંખ્યા
ગણી તેમાંથી પુનરાવર્ત સિવાયના અંક બાદ કરી બાકી રહે
તે અંશમાં લખવા. ને છેદમાં પુનરાવર્ત આંકડા જેટલા ન-
વડા ને અંતવાન આંકડા જેટલાં મીડાં તે નવડા ઉપર ચ-

ડાવવાં. જેમકે $૧૪૩-૧૪=\frac{૧૨૬}{૬}=\frac{૧૩૬}{૬}$ અથવા $૧\frac{૧૩}{૬}$ આવશે. કારણ કે મિત્ર પુનરાવર્ત દશાંશ એ અંતવાન અને પુનરાવર્તનો સરવાળો છે. અંતવાન દશાંશના છેદમાં દશ અને પુનરાવર્તના છેદમાં ઉપર કલ્પા પ્રમાણે નવ છે. એ બેનો સરવાળો વ્યવહારીમાં કરવાને સમચ્છેદ કરવો જોઈએ એટલે અંતવાન દશાંશને નવે અને પુનરાવર્તને દશે ગુણુ-વા પડશે, પછી સરવાળો કરીશું, તો આખી રકમમાંથી અંતવાન બાદ કર્યા જેટલા આવશે કેમકે અંતવાનને $૧૦-૧=૯$ ગુણ્યા છે. જેમકે $૧૪૩=\frac{૪}{૧૦}+\frac{૩}{૬૦}=\frac{૪૬+૩}{૬૦}=\frac{૪૯}{૬૦}$ અથવા $૧\frac{૪૩}{૬૦}=\frac{૪૯}{૬૦}$ આવે, આ ઉપરથી ઉપરનો નિયમ નીકળ્યો છે.

પુનરાવર્ત દશાંશના સરવાળા, બાદબાકી, કરવાં હોય તો તેને ઉપર મુજબ વ્યવહારી અપૂર્ણાકનું રૂપ આપી સરવાળો કે બાદબાકી કરી તેને ફરીથી દશાંશનું રૂપ આપવું. પણ અમૂક આંકડાં ખરા લાવી દશાંશમાંજ સરવાળો કે બાદબાકી કરવી હોય તો જેટલા આંકડાં ખરા લાવવાના કલ્પા હોય તેટલા આંકડાં પુનરાવર્તના રાખી બાકીના આંકડાં મૂકી દેવા ને મૂકી દીધેલા આંકડામાંથી વધી નીકળતી હોય તો તે રાખેલા આંકડામાં ઉમેરવી. તેથી માગેલા આંકડાં ખરા આવશે, આ રીતનું કારણ ઉઘાડુંજ છે.

વાંકડીઆ ગુણાકારની રીત—એ ગુણાકારમાં દશાંશના અમુક આંકડાં ખરા લાવવાનું કહેલું હોય માટે જેટલા આંકડાં ખરા લાવવાના કલ્પા હોય તેટલા આંકડાં ગુણના દશાંશમાં ડાબા હાથ બહીથી ગણીને તે નીચે ગુણકનો પુણુંકનો એકમ લખવો પછી તેની જમણી બાજુએ પુર્ણાક દશક, શતક ઇત્યાદિ લખવા ને પૂર્ણાંકના એકમની ડાબી બાજુએ ગુણકનો દશાંશ, તેની ડાબી બાજુએ સતાંશ, ઇત્યાદિ આંકડાં લખવા. એ રીતે આંકડાં ફેરવ્યા પછી ગુણકતા છેલ્લા આંકડાં વડે તેની ઉપરના આંકડાંથી જમણા આં-

કડા સાથે ગુણી તેની વહી પાંચથી ૧૪ સુધી એક, ૧૫થી ૨૪ સુધી ૨, ૨૫થી ૩૪થી ત્રણ એ પ્રમાણે ગણી તેની ઉપરના આંકડા સાથે ગુણી તેમાં ઉમેરવી. પછી ડાબા હાથ બાણીના આંકડા સાથે સાદા ગુણાકારની રીતે ગુણાકાર કરવો. પછી તેની પાસેના ડાબા હાથ બાણીના આંકડાએ તેની ઉપરના આંકડા પાસેના જમણા આંકડા સાથે ગુણી તેની વહી ઉપરની રીતે ગણી તેની ઉપરના આંકડા સાથેના ગુણાકારમાં ઉમેરવી. બાકીનો ગુણાકાર સાદા ગુણાકાર માફક ગણવો. એ પ્રમાણે બધા આંકડાનો ગુણાકાર કરી સરવાળો કરવો ને જેટલા આંકડા રાખવાના કહ્યા હોય તેટલા રાખી દશાંશ ચિન્હ મૂકવું.

વાંકડીઆ ગુણાકારમાં આંકડા શ્રેયવા પડે છે તેનું કારણ-જે એ આંકડા દશાંશમાં ખરા લાવવાના હોય તો શતાંશના અંક ખરા લાવવા જોઈએ. હવે ગુણ્યનો શતાંશ અને ગુણકનો એકમ એ જોતો ગુણાકાર શતાંશ આવે તેમાં ગુણ્યના સહસ્તાંશ સાથે એકમે ગુણતાં ઉપરની રીતે વહી આવે તે ઉમેરીએતો કસર જાય નહીં ને શતાંશ અંક ખરા આવે. નહીંતો સહસ્તાંશ, દશ સહસ્તાંશ આદી આંકડા મૂકી દઈએ તેની કસર આવે, વળી ગુણ્યનો સહસ્તાંશ ને ગુણકના દશકનો, ગુણ્યના દશ સહસ્તાંશને ગુણકના શતકનો ગુણાકાર પણ શતાંશ આવે છે. તેમજ ગુણ્યના દશાંશનો ને ગુણકના દશાંશનો, ગુણ્યના એકમને ગુણકના શતાંશનો, ઇત્યાદિ ગુણાકાર પણ શતાંશ આવે છે. માટે તે એક ખીજની નીચે મૂકવાને ઉલ્લટાવવા પડે છે. કે બૂલ થાય નહીં. અને કસર ન આવે. માટે જે એ આંકડાનો ગુણાકાર શતાંશ આવતો હોય તેની પાસેના જમણા આંકડાના ગુણાકારની વહી ઉમેરવામાં આવે છે. અને એ ગુણાકારનો દરેક પે-હેલો અંક શતાંશ આવે છે. માટે તે આંકડો કાપ્યા વગર

એક બીજાની નીચે મૂકીએ છીએ.

વાંકડીઆ ગુણાકારમાં વદી પથી ૧૪ સુધીની એ-
ક ઈત્યાદિ ગણીએ છીએ તેનું કારણ-ગુણ્યને ગુણકના
જે આંકોનો ગુણાકાર શતાંશ આવતો હોય તે ગુણ્યના આં-
કની જમણી બાજુના અંક સાથે તે ગુણકના અંકના ગુણા-
કારની વદી પ થી ૧૪ સુધી એક, ૧૫ થી ૨૪ સુધી બે, એ
રીતે ઉપર મુજબ ગણી ઉમેરવામાં આવે છે. અને તે એ-
કજ આંકની વદી એ પ્રમાણે ગણાય છે. બાકીના ગુણાકાર-
માં સાદા ગુણાકાર માફક ગણાય છે. કેમકે તે આંકડો
અને તેની પછીના આંકડા મૂકી દેવામાં આવે છે. તેથી જો
કસરની રીતે એની વદી ઉમેરવામાં આવે નહીં, તો કસર
જાય. હવે તે મૂકી દીધેલા આંકોની વદી ઉપર પ્રમાણે પ
થી ૧૪ સુધીની એક ગણાય છે. કેમકે જો ગુણાકાર એકથી
ચાર સુધી આવે તો તેની વદી ઉમેર્યાથી ચારને બદલે દશ
ગણ્યા બરાબર થાય તેથી છની કસર લીધી ગણાય. ને ચાર
મૂકી દીધા કરતાં છ ઉમેરી વદી ગણ્યાથી કસર વધારે આ-
વે, માટે ચાર મૂકીએ છીએ. પણ પાંચ, છ કે તેની ઉપરાંત
ના ગુણાકારના આંકડા મૂકી દીધાથી કસર વધારે જાય કે
મકે છ મૂકી દેવાને બદલે છના દશ ગણી તેની વદી ઉમે-
ર્યાથી ચારની કસર લીધી. છ મૂકવા કરતાં ચાર વધારે લે-
વામાં કસર થોડી માટે છની કે સાત વગેરેની વદી ગણી-
એ છીએ. એ પ્રમાણે દશ ગુણાકાર આવે તો પણ એક
વદી થાય, ને અગીઆર, બાર, તેર ને ચૌદ આવે તો પણ
એક વદી આવે કેમકે દશની વદી એક ને ઉપરના ચાર
સુધીની વદી ગણાય નહીં એટલે ચૌદ સુધીની એક વદી ગ-
ણાય ને ઉપર મુજબ પંદરની વદી બે ગણાય એજ પ્રમા-
ણે ૧૫ થી ૨૪ સુધીની બે, ૨૫ થી ૩૪ સુધીની ત્રણ ઈત્યાદિ.

વાંકડીઆ ભાગાકારની રીત-જો ભાજકમાં ને ભા-

જ્યમાં પૂર્ણિક હોયતો તેનો અથવા ભાજ્યમાં પૂર્ણિક હોય
 અને ભાજકમાં ન હોય તો તેનો ભાગાકાર કરતાં ભાગા-
 કારમાં પૂર્ણિકના કેટલા આંકડા આવશે તે ધારી તે તથા
 જેટલા આંકડા દશાંશમાં લાવવાનું કહ્યું હોય એ બેના સ-
 રવાળા જેટલા આંકડા ભાજકમાં રાખી તે પછીનો અંક
 વહી લેવાને રાખી બાકીના કહાડી નાંખવા. પણ જો ખૂટે-
 તો ઉપર મીડાં ચઢાવી પુરા કરવા. જો ભાગાકારમાં પૂ-
 ર્ણિક આવવાના ન હોય તો ભાગાકારમાં જેટલાં દશાંશ
 સ્થળ લાવવાનાં હોય તેટલા આંકડા ભાજકમાં રાખવા, પણ
 જો ભાગાકારમાં પ્રથમ મીડાં આવ્યા પછી અંક આવવાના
 હોય તો મીડાં સિવાય જેટલા અંક આવવાના હોય તેટ-
 લા અંક ભાજકમાં રાખવા પછી ભાગ ચલાવવો. જે ભાગ
 આવે તેણે ભાજકના વધારાના આંકડા સાથે ગુણી તેની
 વહી વાંકડીઆ ગુણાકારમાં વહી ગણવાનું કહ્યું તે રીતે ગ-
 ણી તેની પાસેના આંકડાના ગુણાકારમાં ઉમેરવી. પછી બા-
 કીના અંક સાથે ગુણી એ ગુણાકાર ભાજ્યના ડાબી તરફ-
 ના અંક નીચે અનુક્રમે મૂકી બાદ કરવો. બાકી રહે તે ઉ-
 પર આગલો આંકડો ચઢાવ્યા સિવાય ભાજકે ભાગ ચલા-
 વવો. જે ભાગ આવે તેણે પહેલાં કરતાં એક ઓછા આં-
 કડા સાથે ઉપર મુજબ ગુણી તથા વહી ઉમેરી તે ગુણાકાર
 ભાજ્યની બાકીમાંથી બાદ કરવો. વળી તે બાકી ઉપર, ઉપર
 મુજબ ભાગ ચલાવવો, ને એક એક ઓછા સાથે ગુણી બાદ
 કરવો. એ પ્રમાણે ઈવટ સુધી કરી ભાગાકારમાં લાવવાનાં
 દશાંશ સ્થળ જેટલા આંકડા કાપી ચિન્હ મૂકવું, એજવાળ.
 ૦. જેમકે ૪૨૨-૮૫૬૩+૨૫-૮૭૦૬૩૮૨૫નો ભાગાકાર
 કરી ત્રણ દશાંશ સ્થળ લાવવા હોય તો ૪૨૨ ને ૨૫ એ પૂ-
 ર્ણિકના ભાગાકારથી જણાય છે કે બે પૂર્ણિક આવશે તે
 ત્રણ દશાંશ સ્થળ લાવવાનાં છે માટે પાંચ અંક ભા-

જકમાં રાખ્યા તો ૨૫-૮૭૦ આવ્યા ને ૬ વહી માટે રાખ્યો
એટલે નીચે પ્રમાણે ભાગાકાર થશે.

૨૫-૮૭૦ ૬૩(૨૫) ૪૨૨-૮૫૯૩(૧૬-૩૪૫

૨૫૮૭૧

ભાજકના(૦)નિ-૨૫-૮૭૦) ૧૬૪૧૪ આ ભાગાકારને ભાજકનો

૧૫૫૨૨

શાની વાળામાં- ૨૫-૮૭) ૮૬૨ ગુણાકાર કરવાથી ભાજ્ય-

૭૭૬

કડા ગુણાકારની ૨૫-૮) ૧૧૬ ના ઉપયોગમાં લીધેલા આં-

૧૦૩

જદી ગણવાના છે. ૨૫-) ૧૩ કડા મળી રહેશે.

૧૩

૦૦

વાંકડીઆ ભાગાકારની રીતનું કારણ-જેમ ગુ-
ણાકારમાં તેમ ભાગાકારમાં જેટલા જરૂરના તેટલાજ આં-
કડા રાખવામાં આવે છે કે જેથી વખતને મહેનતનો ખચાચ
પાય. તેથી ભાગાકારમાં જેટલા આંકડા આવવાના હોય તે-
ટલાજ આંકડા ભાજકમાં રાખી સ્પષ્ટ ભાગાકારની માફક
ભાગ ચલાવવામાં આવે છે. વધારાના આંકડા મહેનત બ-
ચવા માટે ગણુતા નથી. પહેલા ભાગનો ને ભાજકનો ગુણા-
કાર કરતાં ભાજ્યમાંથી બાદ કરવો. એ બાદબાકીમાં છેલ્લો
આંક આવે તે જ દશાંશનો હોય તે, દશાંશ ગુણાકારની પેઠે
હમેશાં આવે એવો ભાજકની રકમ લેઈ નવા ભાગનો ગુ-
ણાકાર કરવો. કેમકે શેષ ઉપર ટુંકું થવાને નવો અંકચ-
લાવતા નથી. હવે ભાગાકારમાં જેમ અંક નવો કલાડીશું તે-
મ તેની કિંમત પહેલાંના આંક કરતાં દશ ગણી થતી
જશે, માટે ભાજકનો આંક દશ ગણો ભારે લેઈ ગુણવા જો-
ઈએ અને તેથી ભાજકનો એકેક આંક કાપીને ગુણાકાર ૪-

રૂં ૫૨ છે. જેમ ઉપલા દાખલામાં.

૨૫-૮૭૦૬૩૮ ૫)૪૨૨-૮૫૯૩ (પણુ આમાં ભાગાકારમાં ત્રણ દશાંશ લાવવા છે ને એ અંક પૂર્ણાંકના આવશે માટે ભાજકમાં પાંચ અંકની જરૂર પડવાની. તેથી ૨૫-૮૭૦ સુધીના અંક પહેલા ભાગ એક સાથે ગુણવાને અને ૬ વધી બેવાને રાખી બાકીના કામમાં લાંબા નથી. હવે ભાગાકારમાં પહેલો અંક દશકનો આવશે તેનો ને ૦ સહસ્ત્રાંશનો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે ભાજ્યના શતાંશ ૫ સુધીના આંકડા કામમાં આવશે ને છેલ્લા બે પડ્યા રહેશે બીજો ભાગ ૬ એકમે જશે. છ એકમનો ને ભાજકના ૦૦૭ શતાંશનો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે શૂન્ય પડયું મૂકી સાતથી ગુણાકાર કર્યો છે. તેમ ૪ ત્રીજો અંક ભાગાકારમાં ૩ દશાંશ આવશે, એનો તે ભાજકના ૦૮નો ગુણાકાર શતાંશ આવશે માટે સાતના ગુણાકારની વધી માત્ર આઠના ગુણાકારમાં ઉમેરી છે. એજ રીતે એકેક અંક કાપ્યાથી ભાજ્યનો શતાંશ આવે છે માટે આંકડા કાપવામાં આવે છે.

દીકા-ભાલસંકરકૃત જુના અંગગણિતના ૬૨મા મનોયત્નના છેલ્લા હિસાબ જેવા હિસાબમાં અનંત રકમોનો સરવાળો કે બાદબાકી કરવી હોય ત્યારે જેટલા આંકડા દશાંશમાં ખરા લાવવાના હોય તેટલાં મીડાં પ્રથમ આવે ત્યાં સુધીની રકમો લેઈ સરવાળો કરવો અને કેટલીકનો સરવાળો ને કેટલીકની બાદબાકી કરવી હોય તો સરવાળો કરવાની રકમો એકઠી કરવી ને બાદ કરવાની રકમો એકઠી કરવી, પછી તે બંનેની બાદબાકી કરવી. જેટલાં દશાંશ સ્થળ ખરાં લાવવાં હોય તેટલાં મીડાં પ્રથમ આવે ત્યાં સુધીની રકમો લેવી કેમકે તે પછીની રકમો લાંબાથી તે લાવવાના આંકડાની કિંમતમાં કાંઈ ફેર પડતો નથી, તેથી તે રકમો મૂકી દેવામાં આવે છે.

કાચાપાકા તોલનો રીતનું કારણ-કાચાપાકા તોલ-

માં ૪૨ તોલે ૨૧મો, ૪૪ તોલે અગીઆરમો, ૪૫ તોલે નવમો, ૪૮ તોલે છઠ્ઠો, ૫૦ તોલે પાંચમો, ૫૨ તોલે ૪ઠ્ઠો મો, ૫૬તોલે ૩ઠ્ઠોમો, ૬૦ તોલે ૩ જો ભાગ કાચા તોલ- માંથી કાપ્યાથી પાકો તોલ આવે છે, કેમકે ૪૨ તોલે કાચા એકમણે બેશર કાપ્યાથી પાકો મણુ થાય છે ને બેશર એ કાચા મણુનો ૨૧મો ભાગ છે. તેમજ ૪૪ તોલે કાચા મણુ ચાર શર કાપ્યાથી પાકો મણુ થાય ને ચારશર એક કાચા મણુનો ૧૧ મો ભાગ છે. એજ પ્રમાણે ૬૦ તોલમાં મણુ ૨૦ શર કપાય ને ૨૦ શર એ કાચા મણુનો અથવા ૬૦ નો ૩જો ભાગ છે ઇત્યાદિ.

પ્રમાણ.

એક સંખ્યાનં બીજી સંખ્યા સાથે સરખાવવી હોય ત્યારે બંને રકમોનું યુગ્મ કે જોડકું કહેવાય. યુગ્મના પહેલા પદને અગ્રસર અને બીજાને ઉપાગ્રસર કહે છે અને અગ્રસર ઉપાગ્રસરથી જેટલા ગણી નાની કે મોટી હોય તેને ગુણોત્તર કહે છે. જેમકે ૪:૧૨ એ બંને મળીને યુગ્મ કહેવાય ને એમાં ૪ અગ્રસર અને ૧૨ ઉપાગ્રસર છે ને ૩ છે અથવા ૩ ગુણોત્તર છે. એક યુગ્મના ગુણોત્તર જેટલું જ બીજા યુગ્મનું ગુણોત્તર હોય ત્યારે બંને યુગ્મ અથવા બંને યુગ્મનાં ચારે પદો પ્રમાણમાં છે એમ કહેવાય. જેમકે ૪:૧૨ નું ગુણોત્તર ૩ ને ૭:૨૧નું ગુણોત્તર પણ ૩ છે માટે એ બંને યુગ્મનાં ગુણોત્તર બરાબર છે તેથી તે બંને યુગ્મ ૪:૧૨ = ૭:૨૧ અથવા ૪:૧૨::૭:૨૧ આ પ્રમાણે લખાય છે. :: અને આ ચિન્હોનો અર્થ સરખાપણું બતાવવાનો છે. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે દરેક યુગ્મનાં અગ્રસરને ઉપાગ્રસર સંજ્ઞાતિય જોઈએ પણ એક યુગ્મનાં પદની સાથે બીજા યુગ્મનાં પદ સંજ્ઞાતિય હોવાનું કારણ નથી. ૪ મણુ: ૧૨મણુ : : ૭ રૂ:૨૧ રૂને એમ કહેવાય. કેમકે એમાં માત્ર એટલોજ

અર્થ છે કે પહેલાં યુગ્મનું ગુણોત્તર બીજા યુગ્મના ગુણોત્તરની બરાબર છે. અને ગુણોત્તર માત્ર સાદી સંખ્યાજ છે. પણ ૪મણુ:૧૨ કલાક આમ ન લખાય. કેમકે ૪ મણુ એ ૧૨ કલાકનો $\frac{૧}{૩}$ છે એમ કહેવાયજ નહીં. એ બે સરખાવાયજ નહીં.

હવે ૪:૧૨::૭:૨૧ એ ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો તેનું ગુણોત્તર $\frac{૪}{૧૨} = \frac{૧}{૩}$ કોણુ જોઈએ. પણ $\frac{૪}{૧૨} = \frac{૧}{૩}$ હોય તો છેદ ઉરાડ્યાથી $૪ \times ૨૧ = ૭ \times ૧૨$ પણ થાયજ અને પ્રમાણનાં ચારપદોમાં ૪ આદી, ૨૧ અંત અને ૧૨ અને ૭ વચલાં અથવા મધ્ય પદોછે, માટે ચાર પદ પ્રમાણમાં હોય તો આદિને અંતનો ગુણાકાર વચલા બે મધ્યપદોના ગુણાકાર બરાબર થાય. તેમજ ૪:૧૨::૭:૨૧ છે માટે ૧૨:૪::૨૧:૭ એ ચાર પદોપણ પ્રમાણમાં રહેજ એટલે $\frac{૧૨}{૪} = \frac{૨૧}{૭}$ છે. એજ રીતે એ ચાર પદોને જુદી જુદી રીતે ફેરવીને લખીએ તો આઠ રીતે પ્રમાણમાં લખી શકાય.

જો ૪:૧૨::૭:૨૧ એ પ્રમાણમાં હોય તો $૪+૧૨:૧૨::૭+૨૧:૨૧$ છે, કેમકે $\frac{૪}{૧૨} = \frac{૧}{૩}$ છે. હવે જો બે બરાબરમાં બરાબર ૨કમ ઉમેરીએ અથવા બાદ કરીએ તો સરવાળો કે બાદબાકી બરાબર રહે, તેથી $\frac{૪}{૧૨} = \frac{૧}{૩}$ તેમાં બંને તરફ એક ઉમેરીએ તો $\frac{૪+૧}{૧૨+૧} = \frac{૧+૧}{૩+૧}$ થાય અથવા $\frac{૫}{૧૩} = \frac{૨}{૪}$ થાય. એને પ્રમાણમાં લખીએ તો $૪+૧૨:૧૨::૭+૨૧:૨૧$ આવે. તેમજ $૧૨:૪::૨૧:૭$ છે તો $૧૨-૪:૪::૨૧-૭:૭$ થાય કેમકે $\frac{૧૨}{૪} = \frac{૨૧}{૭}$ છે તે બંનેમાંથી એક બાદ કર્યો તો $\frac{૧૨-૪}{૪} = \frac{૨૧-૭}{૭}$ અથવા $\frac{૮}{૪} = \frac{૧૪}{૭}$ થાય અથવા $૧૨-૪:૪::૨૧-૭:૭$ આવે.

વળી $૧૨:૪::૨૧:૭$ છે તો $૧૨+૪:૧૨-૪::૨૧+૭:૨૧-૭$ છે. કેમકે પાછળ કલા પ્રમાણે $૧૨+૪:૪::૨૧+૭:૭$ અથવા $\frac{૧૬}{૪} = \frac{૨૮}{૭}$ છે. અને $૧૨-૪:૪::૨૧-૭:૭$ અથવા

$\frac{૧૨-૪}{૨} = \frac{૧૨-૭}{૩}$ છે. હવે બરાબરનેબરાબર રકમે ગુણે અથવા ભાગે
તો તે ગુણાકાર અથવા ભાગાકાર પણ બરાબર રહે છે માટે
 $\frac{૧૨+૪}{૨} = \frac{૧૨+૭}{૩}$ એ અને $\frac{૩-૧}{૩} = \frac{૩-૭}{૨}$ એ ભાગીએ તો
અપૂર્ણાંક ભાગાકારની રીતે જોડાવાને ગુણ્યાતો $\frac{૧૨+૪}{૨} \times$
 $\frac{૩-૧}{૩} = \frac{૩-૭}{૨} \times \frac{૧૨-૭}{૩}$ અથવા $\frac{૧૨+૪}{૨} = \frac{૩-૧}{૩}$ અથવા
 $૧૨+૪:૧૨-૪::૨૧+૭:૨૧-૭$ થાય.

ઉપરની સિદ્ધતાઓથી નીચેના નિયમો નીકળે છે.

૧. જ્યારે ચારપદો પ્રમાણમાં હોય ત્યારે આદિ ને
અંતનો ગુણાકાર બે મધ્યપદોના ગુણાકારની બરાબર થાય.

૨. પહેલા અને બીજા પદનો અથવા બીજા ને પ-
હેલા પદનો ભાગાકાર તે ત્રીજાને ચોથાનો અથવા ચોથાને
ત્રીજાના ભાગાકારની બરાબર થાય.

૩. પહેલાને બીજાનો સરવાળો : બીજાને :: ત્રીજાને
ચોથાનો સરવાળો : ચોથાને.

૪. પહેલાને બીજાની બાદબાકી : બીજાને :: ત્રીજાને
ચોથાની બાદબાકી : ચોથાને.

૫. પહેલાને બીજાનો સરવાળો : પહેલાને બીજાની
બાદબાકીને :: ત્રીજાને ચોથાનો સરવાળો : ત્રીજાને ચોથાની
બાદબાકીને છે.

૬. જો ચારપદો પ્રમાણમાં હોય તો બન્ને અમ્મસરોના
સરવાળા અથવાબાદબાકી : બન્ને ઉપામ્મસરોના સરવાળા
અથવા બાદબાકી ને છે :: પહેલા અથવા બીજા યુગ્મનું
અમ્મસર : પહેલા અથવા બીજા યુગ્મના ઉપામ્મસરને છે.
જેમકે $૨૧:૭::૧૨:૪$ હોયતો $૨૧+૧૨:૭+૪::૨૧:૭$ અ-
થવા $૨૧+૧૨:૭+૪::૧૨:૪$ અથવા $૨૧-૧૨:૭-૪::૨૧:૭$
અથવા $૨૧-૧૨:૭-૪::૧૨:૪$

૭. બે યુગ્મ પ્રમાણમાં હોય તો અમ્મસરોનો સ-
રવાળો : અમ્મસરોનીબાદબાકીને છે :: ઉપામ્મસરોનો સ-

રવાળો : ઉપાગ્રસરોની આદ્યાકીને છે. જેમકે ૨૧:૭::૧૨:
૪ હોયતો ૨૧+૧૨:૨૧-૧૨::૭+૪:૭-૪

૮. જો ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય ને તેમાંનાં કોઈપણ
ત્રણ પદ આખ્યાં હોયતો ચોથું અથવા બાકીનું પદ નીકળી
શકે. જેમકે ૧૨:૪::૨૧:૭ હોય ને ૧૨:૪::૨૧: () આમાં
ચોથું પદ કહાડવું હોયતો $૧૨ \times \text{ચોથું} = ૨૧ \times ૪$ છે માટે
ચોથાપદ $= \frac{૨૧ \times ૪}{૧૨} = ૭$ આવે. તેમજ ૧૨: ૪:: (): ૭ આમાં
ત્રીજું પદ કહાડવું હોય તો $૧૨ \times ૭ = ૪ \times \text{ત્રીજું}$ પદ માટે
ત્રીજા પદ $= \frac{૧૨ \times ૭}{૪} = ૨૧$ આવે. તેમજ ૧૨: ():: ૨૧: ૭ આમાં
બીજું પદ કહાડવું હોયતો $૧૨ \times ૭ = \text{બીજું} \times ૨૧$. તો બીજા પદ
 $= \frac{૧૨ \times ૭}{૨૧} = ૪$ આવે. તેમજ (): ૪:: ૨૧: ૭ આમાં પેહેલું પદ
કહાડવું હોય તો પેહેલું પદ $\times ૭ = ૨૧ \times ૪$ તો પેહેલાપદ $=$
 $\frac{૨૧ \times ૪}{૭} = ૧૨$ આવે.

૯. કોઈ પણ બે રકમોના ગુણાકાર બીજી કોઈ
પણ બે રકમોના ગુણાકારની બરાબર હોય તો પહેલી બેને
આદિ ને અંતપદની જગાએ ને બીજી બેને બે મધ્યપદોની જગ્યાએ
મૂકવાથી તે ચારે પદો પ્રમાણમાં થશે. જેમકે ૧૨:૪
૭::૨૧:૪ છે, માટે ૧૨:૨૧::૪:૭ પ્રમાણમાં આવે, વળી
જો બે રકમોનો ભાગાકાર બીજી બે રકમોના ભાગાકાર બરા-
બર હોય તો પહેલી બેને પહેલાં યુગ્મમાં ને બીજી બેને બી-
જા યુગ્મમાં અગ્રસર ને ઉપાગ્રસરની જગાએ મૂકવાથી તે
ચારે પદો પ્રમાણમાં થશે. જેમકે $\frac{૧૨}{૪} = \frac{૨૧}{૭}$ છે માટે ૧૨:૪:
:૨૧:૭ પ્રમાણમાં આવે.

૧૦. તેથી જો સરખા ગુણોત્તરનાં ધણાં યુગ્મ પ્રમા-
ણમાં હોયતો બધા અગ્રસરોનો સરવાળો : બધા ઉપાગ્રસરો-
ના સરવાળાને :: કોઈ પણ એક યુગ્મનું અગ્રસર : તે તેજ યુ-
ગ્મના ઉપાગ્રસરને. જેમકે ૩:૫, ૬:૧૫, ૧૮:૩૦, ૩૩૦:૫૫૦

હોય તો $૩+૬+૧૮+૩૩૦:૫+૧૫+૩૦+૫૫૦::૩:૫$ અથવા
 $\frac{૩+૬+૧૮+૩૩૦}{૫+૧૫+૩૦ \times ૫૫૦} = \frac{૩}{૫}$ અથવા $= \frac{૬}{૧૫} = \frac{૧૮}{૩૦} = \frac{૩૩૦}{૫૫૦}$.

૧૧. જે ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તેવાં સરખાં ગુણોત્તરનાં એક કરતાં વધારે ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો દરેક પહેલાં યુગ્મના અગ્રસરોનો ગુણાકાર: દરેક પહેલાં યુગ્મના ઉપાગ્રસરોના ગુણાકારને છે:: દરેક બીજા યુગ્મના અગ્રસરોનો ગુણાકાર: દરેક બીજા યુગ્મના ઉપાગ્રસરોના ગુણાકારને છે. જેમકે,

$$\left. \begin{array}{l} ૪:૭ :: ૧૨:૨૧ \\ ૫:૧૮ :: ૧૨૦: ૪૩૨ \\ ૧૩:૬ :: ૩૬: ૨૭ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{તો } ૪ \times ૫ \times ૧૩: ૭ \times ૧૮ \times ૬ :: ૧૨ \\ \times ૧૨૦ \times ૩૬: ૨૧ \times ૪૩૨ \times ૨૭ \end{array}$$

ત્રીરાશી.

ત્રીરાશીની રીત ને કારણ—ઉપર પ્રમાણના જે નિયમો આપ્યા છે તેનો જેમાં ઉપયોગ થાય છે તેને ત્રીરાશી કહે છે. કેમકે એમાં પ્રમાણનાં ચાર પદોમાંનાં ત્રણ આપેલાં હોય છે, ને ચોથું પદ કહાડવાનું હોય છે. પ્રમાણમાં આપણે કહી ગયા કે પ્રમાણનાં ચારે પદો સન્નતિયજ હોવાં જોઈએ એમ નથી, પણ દરેક યુગ્મનાં પદો તો સન્નતિય જોઈએજ. ત્રીરાશીમાં ચારમાંનાં ત્રણ પદો આપેલાં હોય છે તેમાં એક યુગ્મનાં જે સન્નતિય પદો આપેલાં હોય છે ને બીજા યુગ્મનું એક પદ આપેલું હોય છે ને તેની જાતનું ચોથું પદ કહાડવાનું હોય છે માટે ત્રીરાશીના હિસાબમાં વિચારી જોવું કે કયાં સન્નતિય જે પદો પ્રમાણમાં આપેલાં છે. અને કયા પદની જાતનો જવાબ કહાડવાનો છે. પછી એ ત્રણ પદોને પ્રમાણમાં લખી ચોથું પદ કહાડવું. જેમકે ૪ માણસ ૨૦ ફીટ વાડ કાપે તો ૧૬ માણસ કેટલા ફીટ વાડ કાપશે. આમાં ચાર માણસ ૧૬ માણસ સાથે જે પ્રમાણમાં છે તે પ્રમાણમાં ૨૦ ફીટ જવાબની સાથે રહેશે. એટલે જવાબ ધૂતનો કહાડવાનો છે

માટે ૪ માણસ : ૧૬ માણસને :: ૨૦ ફીટ : જવાબ. હવે પાછળ પ્રમાણમાં કલા પ્રમાણે ૪ આદીxઅંત જવાબ = ૧૬x૨૦ તેથી ૪xજવાબ=૩૨૦ તો જવાબ=૮૦ ફીટ કેમકે પહેલા યુગ્મમાં અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર જેટલા મળ્યા છે તેટલાજ ગણા બીજા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર આવવા જોઈએ, અથવા ૪:૧૬ :: ૨૦ : જવાબ, એટલે $\frac{૪}{૧૬} = \frac{૨૦}{જવાબ}$. તો ૪ x જવાબ = ૨૦ x ૧૬ તો જવાબ=૮૦.

આવી ત્રીરાશીઓને સમત્રીરાશી કહે છે. કેમકે જેમ માણસ વધારે છે તેમ કાળ પણ વધારે થાય છે. તેમજ અમુક ચીજની કીંમતમાં ચીજોની સંખ્યા વધે કે ઘટે તેમ કીંમત પણ વધે કે ઘટે. માલ લેઈ જવાનું બાકું, માલ વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં અથવા અંતર વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. જમીનનું ગણાત, જમીન વધે કે ઘટે અથવા મુદત વધે કે ઘટે, તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. મજૂરની મજૂરી, મજૂરની સંખ્યા વધે કે ઘટે અથવા વખત વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. નાણાંનું વ્યાજ, વ્યાજે મૂકેલી રકમ વધે કે ઘટે અથવા મુદત વધે કે ઘટે તે પ્રમાણમાં વધે કે ઘટે. વગેરે. આ પ્રકારના હિસાબને સમત્રીરાશી કહે છે.

વ્યસ્ત ત્રીરાશીની રીત ને કારણ—જ્યારે પહેલા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર વધારે હોય તો પણ બીજા યુગ્મના અગ્રસર કરતાં ઉપાગ્રસર ઓછું આવવાનું હોય તેને વ્યસ્ત ત્રીરાશી કહે છે. જેમકે ૪ માણસ કોઠકામ ૨૦ દિવસમાં કરે તો ૧૬ માણસ કેટલા દિવસમાં કરે. આમાં ચાર માણસ કરતાં ૧૬ માણસ ૪ ગણાં છે, પણ દિવસ ચાર ગણા ઓછા લાગશે. એટલે માણસ વધ્યાથી મુદત ઘટી તેથી એ વ્યસ્ત પ્રમાણ થયું એને સમત્રીરાશીની માફક પ્રમાણમાં મૂકીએ તો પ્રમાણ રહેશે નહીં. કેમકે ૪ માણસ : ૧૬ માણસ :

૨૦ દિવસ : ૫ દિવસ અથવા જવાબને છે. આમાં ચાર ગણાં માણસ વધ્યાથી કામ ચારગણું જલદી થવાનું માટે દિવસ તો પાંચજ થવાના. તો ઉપર મુજબ પ્રમાણ મૂક્યાથી આદિ ૪૪અંત ૫ = એ મધ્ય પદો ૧૬x૨૦ થશે નહીં. માટે પહેલા યુગ્મના અગ્રસરને ઉપાગ્રસરની જગ્યાએ અને ઉપાગ્રસરને અગ્રસરની જગ્યાએ મૂકવું જોઈએ. તેથી ૧૬ માણસ : ૪ મા. :: ૨૦ દિ. : ૫ દિ. એટલે ૧૬x૫=૨૦x ૪ આવ્યા. અને એ પ્રમાણે પહેલા યુગ્મનાં ૫૬ જિલટાવવાં પડેછે માટે એને વ્યસ્ત પ્રમાણ કહે છે. એજ પ્રમાણે જેમ કપડાંનો પહોળાઈ વધે તેમ લંબાઈ ઓછી જોઈએ. અમુક કીંમત પૂરી કરવાને જેમ સિક્કાની કીંમત વધે તેમ સિક્કાની સંખ્યા ઘટે. અમુક અંતર જવામાં જેમ વ્યય વધે તેમ ચાલવાનું માપ ઘટે. અમુક ભાડામાં માત્ર લેઈ જવા સાર જેમ વજન વધે તેમ અંતર ઘટે. વગેરે જાતના હિસાબ વ્યસ્ત રાશીના છે.

બહુરાશીએટલેશુ?—એ અથવા તેથી વધારે શુણ્ણોત્તર ઉપરથી નવું શુણ્ણોત્તર ઉત્પન્ન કરીએ તે શુણ્ણોત્તરને મિશ્રશુણ્ણોત્તર કહેવાય. જેમ $૫:૬=\frac{૫}{૬}$ અને $૭:૧૨=\frac{૭}{૧૨}$ આ શુણ્ણોત્તરમાંનાં અગ્રસર પને ૭ અને ઉપાગ્રસર ૬ અને ૧૨નો શુણ્ણાકાર કરી $૩૫:૭૨=\frac{૩૫}{૭૨}$ એ શુણ્ણોત્તર ઉત્પન્ન કર્યું. એ મિશ્રશુણ્ણોત્તર તે શુણ્ણોત્તરના અપૂર્ણાંકોના શુણ્ણાકારને મળતું આવે છે. જેમકે $૫:૬=\frac{૫}{૬}$ શુણ્ણોત્તર અને $૭:૧૨=\frac{૭}{૧૨}$ શુણ્ણોત્તર. એ બેનો શુણ્ણાકાર $\frac{૫}{૬} \times \frac{૭}{૧૨} = \frac{૩૫}{૭૨}$ આવ્યા એટલે શુણ્ણોત્તર $૩૫ : ૭૨$ આ પ્રમાણનું છે. ધણાં પ્રમાણ એકઠાં કરવાને આ પ્રમાણે મિશ્રશુણ્ણોત્તર કહાડવું પડે છે. એ મિશ્ર શુણ્ણોત્તરના પ્રમાણને મિશ્ર પ્રમાણ અથવા બહુરાશી પ્રમાણ કહે છે.

બહુરાશીનું કારણ—જ્યારે એ શુણ્ણોત્તર ત્રીજ પદમાં જૂદી જૂદી રીતે વધમઠા કરે ત્યારે તે વધમઠા એ એ શુણ્ણો-

તરથી થયેલા મિશ્રગુણોત્તરથી થતી વધધટની બરાબર થવી જોઈએ. માટે એ બંને ગુણોત્તરમાંના અગ્રસરે અગ્રસરનો ને બિપાગ્રસરે બિપાગ્રસરનો ગુણાકાર કરીને નવું અગ્રસર ને ઉપાગ્રસર બિત્પન્ન કરી ત્રીજા પદમાં થતી વધધટ કહાડીએ છીએ.

સાંકળ રીતી.—જૂદી જૂદી ત્રીરાશીઓ એકઠી કરવાની રીતને સાંકળરીતી કહેછે. તેથી એ રીતનું કારણ ને પ્રમાણનું કારણ સરખાવેછે માટે તે આ ઠંકાણું કરીને સમજાવ્યું નથી.

વ્યાજ.

વ્યાજ એટલે રૂપિયાનું બાકું. કાંઈ રકમ લેતી વખત તેને જે નફો આપવાનું કમ્બલ કરીએ તે વ્યાજ. એ વ્યાજ સો રૂપિયા ઉપર મહિને કે વરસે ઠરાવેછે. વ્યાજના હિસાબમાં જેટલા રૂપિયાલે તે મુદત. જેટલો વખત એ રૂપિયા રહે તે મુદત. એ રૂપિયા ઉપર સો રૂપિએ એક વરસે જે રકમ આપવાનું ઠરાવ્યું હોય તે તેરીખ ને એ તેરીખને મુદત પ્રમાણે એ રૂપિયા ઉપર જેટલું વધારે આપવાનું થાય તે વ્યાજ, ને વ્યાજ મુદત મળીને જેટલું થાય તે રાશ કે વ્યાજ મુદત કહેવાય.

સાદા વ્યાજની રીતનું કારણ.—વ્યાજ, મુદતને મુદતના પ્રમાણમાં વજુઓછું થાયછે. સો રૂપિયા ચાર ટકાની તેરીખે એક વરસ રહેતો ચાર રૂપિયા વ્યાજ થાય પણ બે વરસ રહે તો આઠ થાય. અથવા બસે રૂપિયા એક વરસ રહેતો આઠ રૂપિયા થાય ને બે વરસ રહે તો સોળ રૂપિયા થાય. તેમજ સો રૂપિયા એક વરસ ૫ ટકાની તેરીખે રહે તો પાંચ રૂપિયા ને બે વરસ રહે તો દશ રૂપિયા થાય. એ વ્યાજને સાદું વ્યાજ કહેછે ને એના હિસાબ પંચરાશી રીતેજ પ્રમાણ બાંધવાથી થાયછે માટે એનું કારણ ને ત્રીરાશીનું કારણ એકજ છે. જેમકે પાંચ ટકા લેખે ચાર વરસે ૨૦૦ રૂપિયાનું વ્યાજ થાય.

(૪૫)

૧૦૦ રૂ. : ૨૦૦રૂ. } :: ૫ ટકા વ્યાજ જવાબ.
૧૫ ૪૫.

એટલે. $\frac{૨૦૦ \times ૪ \times ૫}{૧૦૦} = ૪૦$ રૂપિયા વ્યાજ એ જવાબ.

આ પ્રમાણુ ઉપરથી સાદું વ્યાજ કહાડવાની નીચેની રીત નીકળી છે.

મુદત, મુદતનાં વર્ષ ને તેરીખના ગુણાકારને-સોએ ભાગવા તેથી વ્યાજ આવશે. એટલે વ્યાજ = $\frac{\text{મુદત} \times \text{મુદત} \times \text{તેરીખ}}{૧૦૦}$

સાદા વ્યાજમાં મુદત, મુદત, તેરીખ ને વ્યાજ એ ચાર-માંથી કોઈ પણ ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તો ચોથું ૫૬ ક-હાડવાના કોઠા શી રીતે ઉત્પન્ન થાયછે તે.

મુદત કહાડવું હોય તો-જેમકે ૫ ટકાની તેરીખે ૪ વર્ષ ૪૦ રૂ. વ્યાજ થયું તો મુદત શું? એનું પ્રમાણુ—

૫ રૂ. વ્યાજ: ૪૦ રૂ. વ્યાજ :: ૧૦૦ મુદત: જવાબ મુદત.

૧૫: ૪૫.: વ્યસ્ત પ્રમાણુ છે માટેઝલટાવ્યા તેથી

$\frac{૪૦ \times ૧૦૦}{૫ \times ૪} = ૨૦૦$ મુદત જવાબ. તે ઉપરથી નીચેનું કો-

ઠક ઉત્પન્ન થાય છે. મુદત = $\frac{૧૦૦ \times \text{વ્યાજ}}{\text{તેરીખ} \times \text{મુદત}}$

મુદત કહાડવી હોય તો-પાંચ ટકા લેખે ખસેં રૂપિયાનું ૪૦ રૂ. વ્યાજ થયું ત્યારે મુદત કેટલી? એનું પ્રમાણુ.

ખીજું પ્રમાણુ વ્યસ્ત છે ૫૩. વ્યાજ: ૪૦ રૂ. વ્યાજ :: ૧૫: જ. વ.

તે ઝલટાવ્યું તો. ૨૦૦ : ૧૦૦

તેથી $\frac{૪૦ \times ૧૦૦}{૫ \times ૩૦} = ૪$ વરસ જવાબ. તે ઉપરથી નીચેનો કોઠો

ઉત્પન્ન થાય છે. મુદત = $\frac{૧૦૦ \times \text{વ્યાજ}}{\text{તેરીખ} \times \text{મુદત}}$

તેરીખ કહાડવી હોય તો- ૨૦૦ રૂ.નું ૪ વરસે ૪૦ રૂ. વ્યાજ થયું ત્યારે તેરીખ શી? એનું પ્રમાણુ.

૨૦૦ રા. મુ. : ૧૦૦ રા. : મુ. ૪૦ રા. વ્યાજ. મુ. : તે. જવાબ
૪ વ. : ૧૫.

અને સગ પ્રમાણ છે તેથી $\frac{૧૦૦ \times ૪૦}{૨૦૦ \times ૪} = ૫૩$. તેરીખ જવાબ.
તે ઉપરથી નીચેની રીત નીકળે છે. તેરીખ = $\frac{૧૦૦ \times \text{વ્યાજ}}{\text{મુદત} \times \text{મુદત}}$

ટીકા-મુદતમાં વર્ષ, માસને દિવસ આપ્યા હોય તો તે
અધાને વરસનું રૂપ આપવું. તેમાં ૩૦ દિવસનો મહિનો ને
બાર મહિનાનું વરસ ગણવું. વરસને દિવસ આપ્યા હોય તો
દિવસને ૩૬૫ બાગી વરસનું રૂપ આપવું. ઇંગ્રેજી મહિના
આપ્યા હોય તો તે મહિનાના દિવસ પ્રમાણે દિવસ ગણીને
પછી વરસનું રૂપ આપવું.

સરકારે નવા અંકગણિતના ૬૭મા મનોયત્નના ૨૦
૨૧-જેવા હિસાબ સાદા વ્યાજની રીતમાં આવે, પણ તે-
માં થોડો તફાવત છે. તેમાં મુદતનું સવા વરસનું
વ્યાજ અને એજ રકમ સવા વરસ પછી દેવી થવાની
હોય તો મુદત કાપવાની રકમ આપેલી છે ને તે ઉપરથી તે-
રીખને મુદત કઢાડવાનું છે. મુદત કાપવાની રકમમાં તેનું
વ્યાજ ઉમેરીએ તો આપેલું વ્યાજ થાય છે. જેમકે પાંચ ટ-
કા ભેખે સો રૂપીઆનું વ્યાજ ૫ રૂપીઆ થાય ને મુદત
કાપવાના $\frac{૧૦૦}{૬૬}$ થાય ને એ મુદત કાપવાની રકમમાં તેનું વ્યાજ
 $\frac{૫}{૬૬}$ ઉમેરીએ તો વ્યાજના જેટલા $\frac{૧૦૦}{૬૬} = ૫૩$. થાય છે.
માટે ઉપલા હિસાબમાં પણ મુદત કાપવાની રકમ ૩૦
+ તેનું વ્યાજ = $૩૦ \frac{૫૩}{૬૬}$ છે માટે $૩૦ \frac{૫૩}{૬૬} - ૩૦ = \frac{૫૩}{૬૬}$ ર. ૩૦ ર.
નું સવા વર્ષનું વ્યાજ થયું તેથી $\frac{૫૩}{૬૬}$ વ્યાજ : $૩૦ \frac{૫૩}{૬૬} :: ૩૦$
મુ. : જવાબ $૧૦૬૬ \frac{૫૩}{૬૬}$ મુદત આવ્યું તે ઉપરથી તેરીખ કઢા-
ડવાને તેરીખ = $\frac{૧૦૦ \times ૩૦ \frac{૫૩}{૬૬}}{૧૦૬૬ \frac{૫૩}{૬૬} \times \frac{૫૩}{૬૬}} = ૨ \frac{૧}{૬}$ જ.

અકટ્ટહિ વ્યાજની રીતનું કારણ.

જેમાં વ્યાજનું વ્યાજ ગણવામાં આવે છે તેને અકટ્ટહિ

વ્યાજ કહેછે. ચક્રવર્તિ વ્યાજમાં વરસે વરસે કે હપ્તે હપ્તે મુદલનું વ્યાજ ગણી મુદલમાં મેળવી જે રાશ થાય તેને બીજા વરસનું કે બીજા હપ્તાનું મુદલ ગણવામાં આવેછે. એ પ્રમાણે આપેલી મુદત સુધી ગણાય છે જેમકે ૫૦૦ રૂપિયાનું બે વરસનું ૫ ટકા લેખે ચક્રવર્તિ વ્યાજ શું ?

૧૦૦ : ૫૦૦ :: ૫ : ૨૫ રૂ. વ્યાજ પહેલે વરસે થયું. તે + ૫૦૦ મુદલ = બીજા વરસનું મુદલ થયું માટે બીજા વરસનું વ્યાજ કહાડવાને $૧૦૦ : ૫૨૫ :: ૫ : ૨૬\frac{૧}{૪}$ વ્યાજ થયું તે + ૫૨૫ મુદલ = ૫૫૧ $\frac{૧}{૪}$ બે વરસે વ્યાજને મુદલ મળીને થયું અથવા તેમાંથી ૫૦૦ મુદલ બાદ કરીએ તો ૫૧ $\frac{૧}{૪}$ ચક્રવર્તિ વ્યાજ થયું. ઉપરના ત્રિરાશી પ્રમાણથી ચક્રવર્તિ વ્યાજની રીતનું કારણ સમજાશે. પણ ધણી મુદતનું કહાડવું હોય, અને મુદલને તેરીખ અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે લખાણ ધણું થાયછે. તેથી એક ટુંકી રીત છેલ્લી રીત ઉપરથી કરેલી છે તે નીચે પ્રમાણે છે.

કહેલી તેરીખ પ્રમાણે એક રૂપિયાની એક વરસની રાશ કહાડી તેનો મુદતની સંખ્યા જેટલો ધાત કરવો અને તે ધાતને મુદલે ગુણવા. ગુણાકાર આપેલી મુદતની રાશ થશે. માટે જે ચક્રવર્તિ વ્યાજ કહાડવું હોય તો આવેલી રાશમાંથી આપેલું મુદલ બાદ કરવું એ જવાબ.

ચક્રવર્તિ વ્યાજ મણવાની સહેલી રીતનું કારણ.

આ કારણ દાખલાથી જલદી સમજાશે માટે ઉપરનોજ દાખલો લેઈએ.

૧૦૦ રૂ.નું પાંચ રૂપિયા વ્યાજતો એક રૂપિયાનું કેટલું.
 $૧૦૦ : ૧ :: ૫ : ૦૫$ એટલે બીજા વરસનું મુદલ = $૧ + ૦૫ = ૧.૦૫$ તે બીજા વરસનું વ્યાજ કહાડવાને ૧ રૂ.ની ૧.૦૫ રાશ તો ૧.૦૫ની રાશ કેટલી? એટલે,

૧: ૧૦૫ મુ. ૩: ૧૦૫ વ્યાજ મુદલ: જવાબ.

તેથી $\frac{૧૦૫ \times ૧૦૫}{૬} = ૧.૧૦૨૫$ અથવા $(૧૦૫)^2 = ૧.૧૦૨૫$
આવેલી એક રૂપિયાની રાશ માટે ૧.૧૦૨૫ \times ૫૦૦ = ૫૦૦
૩.ની રાશ. પણ જો ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ કહાડવું હોયતો ૧.૦૨૫ \times
૫૦૦ = ૫૦૦ ૩.નું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ.

એજ પ્રમાણે પાંચસે રૂપિયાનું ચાર વરસનું વ્યાજ
કહાડવું હોયતો એક રૂપિયાની રાશ જીજે વરસે ૧.૧૦૨૫
ચર્ચ છે તે ત્રીજા વરસનું મુદલ છે માટે ૧૩. મુ: ૧.૧૦૨૫
૩. મુ. :: ૧૦૫ ૩. વ્યાજ મુદલ: જવાબ.

માટે ૧.૧૦૨૫ \times ૧૦૫ ત્રીજા વરસની રાશ અથવા ચો-
થા વરસનું મુદલ આવ્યું તેથી ચોથા વરસની રાશ કહાડ-
વાને ૧ ૩. મુ: ૧.૧૦૨૫ \times ૧૦૫ ૩. મુ: :: ૧૦૫ ૩. વ્યાજ
મુદલ: જવાબ.

માટે ૧.૧૦૨૫ \times ૧૦૫ \times ૧૦૫ અથવા ૧.૧૦૨૫ \times ૧.૧૦૨૫
અથવા $(૧.૧૦૨૫)^2 =$ એક રૂપિયાની ચાર વરસની રાશ
એને મુદલે ગુણ્યા તો $(૧.૧૦૨૫)^2 \times ૫૦૦ =$ કુલ રાશ - ૫૦૦
= ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ એ જવાબ.

ટીકા-ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં વરસની સાથે માસ દિવસ
હોય તો જેટલા માસને દિવસ હોય તેને અથવા દિવસ હો-
યતો તેને વરસનું રૂપ આપવું. પછી ઉપરની રીત પ્રમાણે
પૂર્ણાંક વરસનું વ્યાજ કહાડી જે રાશ આવે તેનું સાદા વ્યા-
જની રીતે અપૂર્ણાંક વરસનું વ્યાજ કહાડવું તે વ્યાજને પ્ર-
થમ આવેલા વ્યાજનો સરવાળો કરવો એ જવાબ.

જેમ સાદા વ્યાજમાં મુદલ, મુદત, ભેરીખ ને વ્યાજ
ત્રે ચારમાંથી કોઈપણ ત્રણ વાનાં આપ્યાં હોય તે ઉપર-
થી બાકીનું પદ નીકળે છે તેમ ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજમાં પણ નીકળે છે.

મુદત, ભેરીખ ને વ્યાજ ઉપરથી મુદલ કહાડવું
હોય તો તેની રીત ને કારણ—એક રૂપિયાની આપેલી

મુદતના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે આપેલી વ્યાજને ભાગવા કેમકે એક રૂપિયાના આપેલી મુદતના ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજને મુદલે ગુણવાથી વ્યાજ આવેછે એટલે વ્યાજ=એક રૂપિયાનું આપેલી મુદતનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ×મુદલછે માટે મુદલ=વ્યાજ÷એક રૂપિયાનું આપેલી મુદતનું ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજ.

મુદલ, મુદતને વ્યાજ ઉપરથી તેરીખ કહાડવી
હોય તો તેની રીત ને કારણ—વ્યાજને મુદલે ભાગવા એટલે એક રૂપિયાનું આપેલી મુદતનું વ્યાજ આવશે તેમાં એક રૂપિયો ઉમેર્યાથી એક રૂપિયાની આપેલી મુદતની રાશ થશે, માટે તેનું આપેલી મુદત જેટલું ધાત મૂળ કહાડવું, તેથી એક રૂપિયાનું એક વરસનું વ્યાજ મુદલ આવશે તેમાંથી એક બાદ કર્યાથી એક રૂપિયાનું એક વરસનું વ્યાજ રહેશે, તેને સો એ ગુણ્યાથી તેરીખ આવશે, જે વ્યાજને બદલે રાશ આપી હોય તો તેને મુદલે ભાગ્યાથીજ એક રૂપિયાની આપેલી મુદતની રાશ આવશે, તે ઉપરથી ઉપર પ્રમાણે તેરીખ કહાડવી. કેમકે એક રૂપિયાની એક વરસની રાશને મુદત જેટલા ધાત કરી મુદલે ગુણ્યાથી કુલ રાશ આવેછે અથવા તેમાંથી મુદલ બાદ કર્યાથી કુલ વ્યાજ આવેછે માટે મુદલે ભાગ્યાથી એક રૂપિયાની એક વરસની રાશનો મુદત જેટલા ધાત આવે, માટે તેનું ધાતમૂળ તે એક રૂપિયાની એક વરસની રાશ આવે, તેમાંથી એક રૂપિયો મુદલ બાદ કર્યાથી વ્યાજ રહે તેને સો એ ગુણ્યા એટલે તેરીખ આવે.

મુદલ, તેરીખ ને વ્યાજ ઉપરથી મુદત કહાડવી
હોય તો તેની રીત ને કારણ—વ્યાજને મુદલે ભાગી એક રૂપિયો ઉમેરવો. એટલી એક રૂપિયાની મુદત પ્રમાણે રાશ થશે. એ રાશ, તેરીખ ઉપરથી એક રૂપિયાની એક વરસની રાશ કહાડી તેનો વર્ગ, ધન કે ચતુર્ધાત કરવાથી જે આવે તેની બરાબર ચાલ તો એ, ચંચુ કે ચાર વરસ મુદતનાં આવશે.

મતલબ કે પ્રથમ આવેલી રાશ એક રૂપિઆની એક વરસની રાશના ક્યા ધાતની બરાબર છે તે કહાડવું એટલે જેટલા ધાત કર્યા હોય તેટલાં વરસ મુદતનાં બાણુવાં. જે વર્ગની બરાબર થાય તો એ વર્ષ, ધનની બરાબર થાય તો ત્રણ ને ચતુર્ધાતની બરાબર થાય તો ચાર, એજ પ્રમાણે આગળ પણ બાણુવું.

ટીકા-વરસની સાથે મહિના કે દિવસ આવવાના હોય તો ઉપર પ્રમાણે વરસ કહાડ્યા પછી તેટલા વરસની આલા મુદતની ઉપરની રીતે રાશ કહાડવી ને તે આપલી રાશમાંથી બાદ કરવી. બાકી રહે તેટલું બ્યાજ થવાને છેલ્લી જે રાશ બાદ કરી હોય, તેને મુદત ગણી કેટલા દિવસ લાગશે તે સાદા બ્યાજની રીતે કહાડવા, કેમકે એક રૂપિઆની એક વરસની રાશ ઉપરથી બીજા વરસની રાશ કહાડીએ તે, આપેલી એક રૂપિઆની રાશ બરાબર થાય તો મુદત એજ વરસ હોવી જોઈએ. પણ ત્રીજા વરસની રાશની બરાબર થાય તો ત્રણ વરસજ મુદતનાં હોવાં જોઈએ. એ ઉપરથી ઉપરની રીત કહાડી છે.

વટાવ ને મુદત કાપવા વિષે.

વટાવ કાપી આપવાનો માલની ખરીદી ઉપર હોયછે, એટલે પાંચ ટકા વટાવ કાપવાનો હોય તો સો રૂપિઆના માલની ખરીદી કરીએ તો પાંચ રૂપિઆ વટાવના કાપી આપે, એટલે સો રૂપિઆના ૯૫ રૂપિઆ રોકડા આપવા પડે. અને તે ઉપરથી જેટલાનો માલ લીધો હોય તે પ્રમાણમાં વટાવ કાપી આપે. તેથી એવા હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય છે માટે તેનું કારણ ત્રિરાશી જેવુંજ છે.

મુદત કાપવાની રીત ખરી સાચી છે તેનું કારણ.

મુદત કાપવી એટલે અમુક મુદત પછી અમુક દરે કોઈ રકમ દેવી થવાની હોય, તે રકમ હાલ લેવાને તેમાંથી આપેલી

મુદતનું જે વ્યાજ કાપી આપવું તે. એ રકમમાંથી વ્યાજ કાપતાં જે બાકી રહે તેને તુર્ત કીંમત કહે છે. એ તુર્ત કીંમતને આપેલા દરે આપેલી મુદત સુધી વ્યાજે રાખ્યાથી દેવી થવાની રકમની બરાબર થવી જાઈએ. માટે પાંચ ટકા લેખે એક વરસ પછી ૧૦૫ રૂપિયા દેવા થવાના હોય તો તેની તુર્ત કીંમત સો રૂપિયા હોવી જોઈએ, કેમકે સો રૂપિયાને એક વરસ પાંચ ટકા લેખે વ્યાજે મૂકીએ તો ૧૦૫ રૂપિયા થાય છે. ને તેમાં પાંચ રૂપિયા મુદત કાપવાની રકમ છે. પણ પાંચ ટકા લેખે ૧૦૦ રૂપિયા દેવા થવાના હોય તો તુર્ત કીંમત ૯૫ રૂપિયા ન આવે, કેમકે ૯૫ રૂપિયાને પાંચ ટકા લેખે એક વરસ વ્યાજે રાખ્યાથી સો રૂપિયા થતા નથી. પણ પાંચ રૂપિયાના વ્યાજ જેટલા ઓછા રહે છે. એટલે સો રૂપિયાની મુદત કાપવાની રકમ પાંચ રૂપિયામાંથી પાંચ રૂપિયાના વ્યાજ જેટલી ઓછી રહે છે. ને સો રૂપિયાનું વ્યાજ પાંચ રૂપિયા આવે છે. માટે જો કાઈરકમની મુદત કાપવાની રકમ આપી હોય તો તેમાં તે મુદત કાપવાની રકમનું વ્યાજ ઉમેરીએ તો તે મૂળ રકમના વ્યાજની બરાબર થવું જોઈએ-

વેપારીની રીત બાદી શાથી છે તેનું કારણ.

ઉપર પ્રમાણે મુદત કાપવાની રીતને વાસ્તવિક રીત કહે છે, પણ વેપારી લોકો તેમ કરતા નથી. તેમને લાંબી મુદત કાપવા હોતી નથી. તેઓ પાંચ ટકા લેખે એક વરસની મુદત કાપવી હોય તો એકદમ સોના પંચાણું લે છે. કેમકે ગણવાને સુગમ પડે છે. ને લાંબી મુદત કાપવાની નહિ હોવાથી જાઓ ફેર પડતો નથી. પણ એ રીત વાજબી કહેવાય નહિ. આ મુદત કાપવાની રીતને વેપારીની રીત કહે છે.

ઉપરની રીત સાદે વ્યાજે મુદત કાપવાની છે, કેમકે મુદત એક વરસની બાદરે બાણું કરીને હોય છે. પણ વ-

રસ કરતાં વધારે મુદત કાપવાની હોય ને તે ચક્રવૃદ્ધિ વ્યાજે કાપવાની હોયતો એક રૂપિયાની આપેલી મુદત સુધીની આપેલે દરે રાશ કહાડવી, તે રાશ ઉપરથી ત્રિરાશી રીતે આપેલી રકમની મુદત કાપવાની રકમ કહાડવી. એટલે એ રાશમાંથી એક રૂપિયો બાદ કરીએ તો તે એક રૂપિયાની જે રાશ આવી હોય તેની મુદત કાપવાની રકમ થઈ, માટે એક રૂપિયાની રાશ: આપેલી દેવી થવાની રકમને :: એક રૂપિયાની રાશની મુદત કાપવાની રકમ: મુદત કાપવાની રકમને=જવાબ.

ટીકા-હિંદુ મહિના હોય તો તે પ્રમાણે મહિનાના દિવસ ગણી વરસના ૩૬૦ દિવસ ગણવા. મહિનાના ૩૦ દિવસ ને વરસના ૧૨ મહિના. પણ અંગ્રેજી મહિના હોયતો તે મહિનાના દિવસ પ્રમાણે દિવસ ગણી વરસના ૩૬૫ દિવસ ગણવા. દિવસ ગણવામાં પહેલો ને છેલ્લો બે દિવસમાંથી માત્ર એક દિવસ ગણવો.

વીમા કુમિરાન વગેરે.

અગ્નિ, જળ વગેરેથી પોતાના માલને નુકશાન ન થાય તે માટે કીમ્મત ઉપર દર સેંકડે જે રકમ આપવાની ઠરાવીએ એ ઠરાવને વિમો કહેછે; ને એ જોખમ રાખનારને જે રકમ આપવાની ઠરે તેને વીમા ખર્ચ કહેછે; તથા એ ઠરાવ ના લખતને વીમા ચીઠી કહેછે. આ હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાયછે. જેમકે સેંકડે ૫ ટકા લેખે ૫૦૦ના માલનું વીમા ખર્ચ: શુ? તો ૧૦૦ માલ : ૫૦૦ રૂ માલ :: ૫,૩ વીમા ખર્ચ જવાબ=૨૫ રૂપિયા વીમાખર્ચ.

માલના વીમામાં માલનું નુકશાન થવાથી વીમા ખર્ચ સુદ્ધાંત કીમ્મત ભરી લેવાય એવી રીતે વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો જાણવું કે સો રૂપિયાને બદલે સેંકડે જે વીમા ખર્ચ

હોય તે સોમાંથી બાદ કરતાં બાકી રહે તેટલા રૂપીઆના માલ ઉપર સેંકડાનું વીમા ખર્ચ આપ્યું છે. જેમકે સેંકડે ૫ ટકા વીમા ખર્ચ આપ્યું હોય તે માલની કીમત બરી લેવાની ઠરે તો વીમા ખર્ચ સુદ્ધાંત મળે એવી રીતે વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો ૯૫ રૂ. નો માલ હોવો જોઈએ, કેમકે માલની કિમ્મત બરી લેઈએ ત્યારે સો રૂપીઆ મળે તેમાંથી ૫ રૂ. તો વીમા ખર્ચના આપ્યા છે તે લેનાં ૯૫ રૂપીઆ બાકી રહે છે.

આપણા દેશમાં જીંદગીનો વીમો હાલમાં જ દાખલ થયો છે તેથી એ રીત નવી છે. જીંદગીનો વીમો ઉતરાવીએ ત્યારે જેટલાનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તેટલા રૂપીઆ વીમો ઉતરાવનાર મરી ગયા પછી તેના વારસને વીમો ઉતારનાર આપે એવો ઠરાવ હોય છે. જીંદગીના વીમામાં સેંકડે જે રકમ આપવાની ઠરી હોય તે દરથી જેટલાનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તે પ્રમાણે જે રકમ થાય તેટલી રકમ દર વરસે વીમો ઉતરાવનાર જીવે ત્યાં સુધી આપવી પડે છે. જે એકવાર પણ ન આપે તો પહેલાં આપેલા રૂપિઆ નકામા જાય છે. તેમજ જીંદગીના વીમામાં દર વરસે જે રકમ આપવાની ઠરે તે રકમ વીમો ઉતરાવ્યા પછી તરતજ આપવી પડે છે, ને તે પછી દર વરસે આપવી જોઈએ છીએ. જેમકે ૧૦૦૦ રૂપીઆનો સેંકડે ૫ ટકા પ્રમાણે જીંદગીનો વીમો ઉતરાવ્યો હોય તો ૫૦ રૂપીઆ પ્રથમજ આપવા પડે, ને તે પછી દર વરસે તે જીવે ત્યાં સુધી ૫૦ પચાસ રૂપીઆ આપવા પડે. બાદ તે મરી જાય ત્યારે તેના વારસને વીમાવાળા ૩૧૦૦૦) આપે. એટલે ઉપલાજ હિસાબમાં વીમો ઉતરાવનાર વીશ વરસ કરતાં વધારે જીવે તો તેને નુકશાન થાય ને પાંચ દશ વરસમાં મરી જાય તો વીમો ઉતારનારને નુકશાન ખમવું પડે.

માલના વીમામાં જેમ સો રૂ. ને માલે વીમાખર્ચ ઠરાવ પ્રમાણે આપવાનું હોય છે તેમ આડત, કમીશન કે દ-

લાડી પણ સોના માલ ઉપરજ આપવાની હોય છે.

લોન અને શેર.

આમુક મુદતે પાછા આપવાની સરતે આમુક વ્યાજે રૂપિયા લેવા તે લોન. તે મુદત પુરી થતા મુધી લોનના રૂપિયા પાછા મળતા નથી પણ માત્ર વ્યાજ મળે છે. એવી રીતે ધણું કરીને રાજ કે મ્યુનિસિપાલિટી કરજ કરે છે. લોનના રૂપિયા મળતા નથી, પણ લોન વેચી શકાય છે. કરજ કરનારની સ્થિતિ પ્રમાણે લોનનો ભાવ ઉપર કે અંદર હોય છે, એટલે હલકી સ્થિતિ હોય તો સોની લોનનો ભાવ સોની અંદર અને સારી સ્થિતિ હોય તો સો ઉપર ભાવ હોય છે. જેટલો ભાવ સેંકડે ઓછો હોય તેટલું સેંકડે ડિસ્કાઉંટ કહેવાય છે, ને જેટલો ભાવ સેંકડે વધારે હોય તેટલું પ્રિમિયમ કહેવાય છે.

કોઇ મોટું કામ કરવાને જ્યારે એક જણ માથે લેઈ શકતો નથી ત્યારે તે કામમાં જેટલી રકમ જોઈએ, તેના સો સોના કે બેંક બેંક કે તેથી વધારે રકમના ભાગ કરીને તે રકમ ધણા જણ વચ્ચે એકઠી કરે છે, એ દરેક ભાગને શેર કહે છે, ને શેર રાખનારા કે ખરીદનારાને ભાગીદાર કે શેરહોલ્ડર કહે છે. દરેક શેર સોની અંદરનો, સોનો કે તેથી વધારે હોય છે. તે શેર તે કામની જરૂરીઆતને ઊપજ ઉપર ગણતરી કરીને લોકો પોતાના ગમ પ્રમાણે ખરીદ કરે છે. એ શેરના રૂપિયા મળતા નથી પણ તે કામમાં નફો થાય તેમાંથી શેર પ્રમાણે વેંહેચણી કે નફોનો હિસ્સો મળે છે. ખજા લોનની માફક શેર પણ બજારમાં વેચી શકાય છે ને તેના ભાવમાં પણ ડિસ્કાઉંટ કે પ્રિમિયમ હોય છે. લોન ને શેરની રીત આપણા દેશમાં નવી દાખલ થવાથી અને ગુજરાતના ધણા ભાગના લોકો એ રીતથી અજાણ્યા હોવાથી એ બંને રીતના હિસાબ સમજવા બહુ મુશ્કેલ જણાય છે.

જો ૧૪ ડિસ્કાઉંટ હોય તો સોની લોનનો ભાવ ૮૬

જાણુવો એટલે ૧૪ ટકા ડિસકૌંટે હજારની લેન લે તો ૮૬૦ રૂપિયા રોકડા આપવા પડે. તેમજ ૧૦ ટકા પ્રિમિયમ ૨૫૦ નો એક એવા શેર લે તો દરેક શેરના સેંકડે ૧૧૦ એટલે ૩૨૫૦ ના ૩૨૭૫ આપવા પડે, માટે એવા ચાર શેર લેતો રૂપિયા ૧૧૦૦ રોકડા આપવા પડે. આ ઉપરથી માલમ પડશે કે આવા હિસાબ ત્રિરાશી પ્રમાણથી થાય.

તેમજ ૮૬ ને લાવે ચાર ટકાની ૧૦૦૦ ની લેન લે તો ૩૮૬૦ આપવા પડે, પણ તેનું વ્યાજ લેન ચાર ટકાની છે માટે ૧૦૦ ની લેનના અથવા ૮૬ રોકડા રૂપિયાના ચાર રૂપિયા વ્યાજ આવે માટે ૧૦૦૦ ની લેનના અથવા ૮૬૦ રોકડા રૂપિયાના ૪૦ રૂપિયા વ્યાજના આવશે.

લેનનું વ્યાજ-હિસાબ ગણવામાં દરવરસનું અને શેરનો નફો પણ દર વરસનો ગણાય છે. ઊપલાજ હિસાબમાં એમ કહ્યું હોય કે ૧૪ ટકા ડિસકૌંટે ૮૬૦ રૂપિયા રોકડાની કેટલી લેન આવશે એટલે ૮૬ ને ભાવે ૧૦૦ ની લેન આવે છે એમ જાણવું તેથી ૮૬૦ રૂપિયાની ૧૦૦૦ ની લેન આવે એ ત્રિરાશીથી માલમ પડશે.

પણ જો અમુક રકમ વ્યાજ ઊપજવવાને કેટલી લેન લેવી અથવા કેટલા રોકડાની લેન લેવી એમ કહે તો—જેમકે ૪૦ રૂપિયા દર વરસે વ્યાજ ઊપજવવાને ૮૬ ને લાવે ચાર ટકાની કેટલી લેન લેવી એટલે ૧૦૦ ની લેનનું ૪૮૬૦ વ્યાજ આવે છે, માટે ૪૦ વ્યાજ ઊપજવવાને ૧૦૦૦ ની લેન લેવી, પણ ૮૬ નો લાવ છે માટે ૧૦૦૦ ની લેનના ૩૮૬૦ રોકડા આપવા જોઈએ, તે ૪ ટકાની લેન છે માટે દર વરસે ૩૪૦) વ્યાજ આવવાનું.

અમુક જાતની લેનોની પેદાશ યરાયર થીજી જાતની લેનો લેવાને કેટલા રોકડા રૂપિયા જોઈએ, એમ કહે તો ચાર ટકાની ૧૦૦૦ ની લેન જેટલું વ્યાજ આવવાને, પાંચ

ટકાની કેટલી લોન લેવી એમ કહ્યું હોય તો ૪૮૬૧ની ૧૦૦૦ ની લોનનું વ્યાજ ૩૪૦ આવે માટે ૫ ટકાની લોનનું ૩૪૦ વ્યાજ ઉપજવવાને ૮૦૦ ની લોન લેવી જોઈએ, પણ એ બીજી જાતની લોનો લેવાને રોકડા કેટલા જોઈએ એમ માન્ય હોય તો—જો એ લોનનો ભાવ ૧૧૦ હોય તો (૮૦૦) ની લોનના ૩૮૮૦ રોકડા આપવા જોઈએ.

જો ચાર ટકાની લોન ૮૦ ને ભાવે લેતાં સેંકડે શું વ્યાજ પડશે એમ કહ્યું હોય તો ૮૦ રોકડાનું વ્યાજ ચાર ટકા તો સો રોકડાનું વ્યાજ પાંચ રૂપિયા આવે. પણ ધણી જાતની લોનોમાંથી કઈ જાતની લોનો લેવાથી ફાયદો થશે એમ કહાડવું હોયતો, બધી લોનોનું સેંકડે કેટલું વ્યાજ ઉપજશે તે કહાડી જેનું વધારે વ્યાજ આવે તે લેવાથી ફાયદો જાણવો.

એક જાતની લોન વેચીને તેના જે ઉપજે તેની બીજી જાતની લોન લેવી હોય તો પ્રથમની લોનનું જે ઉપજે તેટલાની બીજી જાતની લોન કેટલી આવશે તે કહાડવું. તેમજ તેનું શું વ્યાજ ઉપજશે તે કહાડવું હોય તો તે લોનના દર પ્રમાણે તેટલી લોનનું વ્યાજ કહાડવું. એ લોનથી નફો ટોટો કહાડવો હોય તો પહેલી લોનનું જે વ્યાજ ઉપજતું તે ને બીજીવારની લોનનું જે વ્યાજ ઉપજશે તે બેનો મુકાબલો કરવાથી માલમ પડશે. પણ જો અમુક દરની લોન શા ભાવે લેવાથી સેંકડે અમુક વ્યાજ ઉપજે એમ કહ્યું હોય તો, એટલે ૪૮૬૧ની લોન શા ભાવે લેવી કે સો રૂપીએ પાંચ વ્યાજ પડે એમ કહ્યું હોય તો, ચાર ટકાની લોન ૮૦ ને ભાવે લેવાથી સો રૂપીઆનું વ્યાજ પાંચ રૂપીઆ ઉપજશે, કેમકે ૮૦ ને ભાવે ૧૦૦ રૂપિયાની લોન ૧૨૫ની આવશે તેથી તેનું વ્યાજ ચાર ટકા લેખે પાંચ રૂપીઆ ઉપજશે. આ બધી રીતોનાં પ્રમાણ ત્રીસશી જેવાંજે માટે તે ગાંડી બતાવ્યાં નથી—શેરના હિસાબ પણ લોનના જેવાંજે, માટે તે વિષે જુદી રીત લખી નથી.

નફા તોટો.

કાઈ વેપારમાં મુડી અથવા મૂળ બેઠક કે ખરીદી કરતાં જોટલા વધારે ઉપજો તેટલો નફો ને જોટલા ઓછાકે-
પજો તેટલો તોટો કહેવાય. નફો તોટો ખરીદી કે બેઠકના સેંકડા ઉપર ગણાય છે. જેમકે ૫૦૦ રૂપિયાના માલના ૬૦૦ ઉપજ્યા ત્યારે સેંકડે કેટલો નફો, તો ૫૦૦ ઉપર ૧૦૦ રૂપિયા નફો થયો માટે સેંકડે ૨૦ રૂપિયા નફો જાણવો. પણ એ રૂપિયે લીધેલો માલ અઠી રૂપિયે વેચ્યો તો સેંકડે ૧૨૫ રૂપિયા ઉપજો એટલે ૨૫ રૂપિયા સેંકડે નફો થાય. પણ એમ કહે કે ૫ રૂપિયે લીધેલો માલ સેંકડે ૨૦ રૂપિયા નફો મેળવવાને કેટલે વેચ્યો તો સોના (૧૨૦) ઉપજવા-
વાછે, માટે ૫ રૂપિયાના કેટલા રૂપિયા ઉપજવા તો ૬ રૂપિયા આવે. વળી ૬ રૂપિયે કાંઈ માલ સેંકડે ૨૦ રૂપિયા નફો લઈ વેચ્યો હોય તો તે કેટલે ખરીદ કરેલો એમ કહેતો ૧૦૦ રૂપિયાના ૧૨૦ ઉ-
પજ્યા છે તો ૬ રૂપિયા કેટલાના માલના ઉપજેલા ને કહાડવાથી ૫ રૂપિયા આવશે. તેમજ ચાર રૂપિયે કાંઈ માલ વેચ્યાથી સેંકડે ૨૦ ટકા ખોટ ગઈ તો બેઠક કેટલી. એમ કહાડતું હોય તો ૧૦૦ના માલના ૮૦ ઉપજો એ રીતે એ માલ ચાર રૂપિયે વેચ્યો છે, માટે તે માલ ૫ રૂપિયે લીધેલો જાણવો. વળી જો એમ કહે કે એક ઘોડો ૫૦ રૂ-
પિયે વેચવાથી સેંકડે ૨૦ ટકા ખોટ જાય તો સેંકડે ૨૦ ટકા નફો લેવાને કેટલે વેચ્યો. એમ કહે તો ત્યારે ૨૦ ટકા ખોટ જાય છે, એટલે ૧૦૦ના ૮૦ ઉપજો છે ત્યારે તે ઘો-
ડો ૬૨૫ રૂપિયાનો હોવો જોઈએ ને તે ઉપર સેંકડે ૨૦ ટકા નફો લેવો છે એટલે ૧૦૦ના ૧૨૦ ઉપજવા છે, માટે ૬૨૫ના ૭૫ ઉપજવા જોઈએ. આ ઉપરથી માલમ પડ-
શે કે ઉપરના બધા હીસાબ ત્રીરાશીથી થશે.

પ્રમાણ ભાગ.

એક આપેલી સંખ્યાના બીજી આપેલી સંખ્યાઓની સાથે પ્રમાણમાં થાય એવા ભાગ કરવા તે પ્રમાણ ભાગ. આ ત્રીરાશી પ્રમાણ જેવુંજ છે. કેમકે ૪૦ રૂપિયાના ચાર ભાગ એવી રીતે કરવા કે તે ૨-૪-૬-૮ ની સાથે પ્રમાણમાં થાય. તે ૨, ૪, ૬, ૮ મળીને ૨૦ થાય છે, માટે ૨૦ રૂપિયા હોય તો પહેલો ભાગ ૨, બીજો ૪, ત્રીજો ૬, ચોથો ૮ રૂપિયાનો થશે. તે ૪૦ રૂપિયા છે. સારે ત્રીરાશી રીતે કરવાથી ૨૦: ૪૦:: પહેલો ભાગ ૨: ૪ પહેલો ભાગ.

એજ રીતે ૨૦: ૪૦:: બીજો ભાગ ૪: ૮ બીજો ભાગ

એ પ્રમાણે બાકીના ભાગ પણ આવશે, ઉપર પ્રમાણ કરવાનું કારણ એકે ૪૦ રૂપિયાના ૨૦ સરખા ભાગ કરીએ તો દરેક બે રૂપિયાનો થાય, માટે તેવા બે ભાગ તે ૪, ચાર ભાગ ૮, છ ભાગ ૧૨ ને ૮ ભાગ ૧૬ રૂપિયા થાય.

પંત્યાણું.

જે કે તેથી વધારે ભાગીદારોએ કરેલા સહીઆરાવે પારમાં થયેલો નફો અથવા તોટો વહેંચી લેવાની રીતને પંત્યાણું કહે છે. ભાગીદારોએ આપેલા રૂપિયા સરખી મુદત સુધી રહ્યા હોય તો તેને એકવડું અને ભાગીદારોના રૂપિયા ને મુદત વધતી ઓછી હોય તો તેને બેવડું પંત્યાણું કહે છે. એકવડા પંત્યાણાના હિસાબ પ્રમાણ ભાગની રીતે ત્રીરાશીથી થાય છે. કેમકે તેમાં રૂપિયાના પ્રમાણમાં નફો વહેંચી લેવાનો હોય છે. અથવા સરખા રૂપિયા દરેકે આપ્યા હોય ને મુદત જુદી જુદી હોય તો મુદતના પ્રમાણમાં નફો વહેંચી લેવાનો હોય છે, અર્થે ૪૦૦ ને ૬૦૦ રૂપિયા આપી વેપાર કર્યો તેમાં ૧૦૦ રૂપિયા નફો થાય તો એ નફો કુલ ૧૦૦૦ રૂપિયા ઉપર થયો તેમાં એ ના ૪૦૦ છે માટે ત્રીરાશી રીતે એના ૪૦૦ ને ૬૦૦ રૂપિયા

છે માટે ૬૦ રૂપિયા નફો મળશે. તેજ પ્રમાણે અગ્રે ને વર્ગે
 ૧૦૦૦ રૂપિયા સરખે ભાગે કાઢી વેપાર કર્યો તેમાં અંત ૬
 માસ ને વેના ૧૨ માસ રૂપિયા રહ્યા હોય ને ૧૮૦ રૂપિયા
 નફો થયો હોયતો ૧૦૦૦ રૂપિયા ૧૮ મહિના રહેવાથી ૧૮૦
 નફો થયો ગણાય, માટે ૬ માસ વાળાને ત્રીરાશી રીતે ગણવાથી
 ૬૦ ને બાર માસ વાળાને ૧૨૦ રૂપિયા નફાના આવશે, પણ
 એવડા પંત્યાળામાં રૂપિયાને મહિના જૂદા જૂદા હોવાથી રૂ-
 પિયાને મહિનાના પ્રમાણમાં નફો વહેંચવાનો હોય છે, જે-
 મકે અંત ૪૦૦ રૂપિયા ૬ માસ ને વેના ૮૦૦ રૂપિયા
 ૪ માસ રહ્યા હોય ને ૫૬૦ રૂપિયા નફો થયો હોય તો અં-
 ના $૪૦૦ \times ૬ = ૨૪૦૦$ રૂપિયા એક માસ અને વેના ૮૦૦
 $\times ૪ = ૩૨૦૦$ રૂપિયા એક માસ રહ્યા હોય તેવું થયું. માટે
 કુલ ૫૬૦૦ રૂપિયા એક માસ રહ્યા ને તેમાં ૫૬૦ રૂપિ-
 આ નફો થયો છે તેથી ૨૪૦૦ રૂપિયા વાળાને પ્રમાણ રીતે
 ૨૪૦ ને ૩૨૦૦ રૂપિયા વાળાને ૩૨૦ રૂપિયા નફાના આ-
 વશે. ઉપરની રીતથી પંત્યાળાનું કારણ સમજશે.

ઈષ્ટરાશિ.

ઈષ્ટરાશી જે પ્રકારની છે. એકવડી ને એવડી, જેમાં એ-
 કવાર ખોટા જવાબ ધારીને હિસાબમાં કહેલા સંકેત પ્રમાણે
 કરી ખરો જવાબ કહાડવાનો હોય છે, તેને એકવડી ઈષ્ટ-
 રાશિ કહે છે. એકવડી ઈષ્ટરાશિના દાખલામાં જવાબને કો-
 ઈ સંખ્યાએ ગુણવાનું અથવા ભાગવાનું કે તેનો કોઈ ભાગ
 વત્તો અથવા ઓછો કરવાનો હોય છે, એટલે કોઈ આપે-
 લા ગુણોત્તરમાં જવાબ વધે અથવા ઘટે છે.

રીત-એક ખોટા જવાબ ધારી હિસાબમાં કહ્યા પ્રમા-
 ã તેને ગુણવા અથવા ભાગવા ને તેથી જે ફળ આવેને:
 હિસાબમાં સાચી સંખ્યાનું જે ફળ આપ્યું હોય તે:: ધારે-
 લી ખોટી સંખ્યા: જવાબ, આ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધી જ-

વાળ કાઢવે આ ઉપરથી માલમ પડશે કે એકવડી ઇષ્ટ-
રાશીના દાખલા તે પ્રમાણુ ભાગના દાખલાની રીતેજ થાય છે.

ઈષ્ટરાશિનું કારણ—પ્રમાણુમાં પહેલું પદ બીજા
પદ સાથે જે પ્રમાણુમાં હોય તેજ પ્રમાણુમાં ત્રીજું પદ,
ચોથાપદ સાથે હોવું જોઈએ; તેમ ઇષ્ટરાશીમાં પણ ખોટીસં-
ખ્યા જે પ્રમાણુમાં જવાબની સાથે હોયછે તેજ પ્રમાણુમાં
ખોટી સંખ્યાનો કોઈ ભાગ, જવાબના તે ભાગની સાથે હોય
છે. તેમજ ખોટી સંખ્યા ખરી સંખ્યા સાથે જે પ્રમાણુમાં
રહે છે તેજ પ્રમાણુમાં તેમાં તેનો કોઈ ભાગ ઉમેરીએ અ-
થવા બાદ કરીએ તે પણ રહે છે. જેમકે ખરી સં-
ખ્યા ૧૬ હોય, તે ખોટી સંખ્યા ૪ ધારી તો ૧૬ ને ૪ જે
પ્રમાણુમાં છે તેજ પ્રમાણુમાં ૧૬ના ને ૪ ના બમણા કે બી
જે ભાગ પણ રહેશે. તે નીચે પ્રમાણે.

ખો.સં.નાબમણા૮: ખ.સં.નાબમણા૩૨::૪ ખો.સં.:૧૬ જ.
” ”નો બી.ભા.૨: ” ”નો બી.ભા.૮::૪ ” ”:૧૬ જ.
ખોટી સંખ્યામાં તેનો બીજો ભાગ ઉમેર્યાથી ૧ ને ખરી સં-
ખ્યામાં તેનો બીજો ભાગ ઉમેર્યાથી ૨૪ થાય છે માટે—
૬ : ૨૪ :: ૪ખોટીસંખ્યા : ૧૬ જ. તેમજ ખોટી સંખ્યામાં
થી તેનો બીજો ભાગ બાદ કર્યોતો ૨ ને ખરી સંખ્યામાંથી
તેનો બીજો ભાગ બાદ કર્યો તો ૮ રહેછે માટે—૨ : ૮ :: ૪: ૧૬.
જેવડી ઇષ્ટરાશિમાં એવાર ખોટાજવાબ ધારીને સંકેત પ્રમાણુ
ગણવાનું હોય છે. તેની બે રીત છે.

૧ લી રીત—આ હિસાબમાં ખરી સંખ્યાને સંકેત પ્ર-
માણુ ગણવાથી શું ફળ આવશે તે કહેવું હોય છે. માટેપ્ર-
થમ એક સંખ્યા ધારી તે ઉપરથી સંકેત પ્રમાણુ ફળ ઉત્પ-
ન્ન કરી હિસાબમાં ખરા જવાબનું જે ફળ આપ્યું હોય તે
બેની બાદબાકી કરવી. જો ખરા જવાબના ફળ કરતાં ધારેલી
સંખ્યાનું ફળ ઓછું હોય તો જેટલું ઓછું હોય ત્યાં આ-

ગળ ઓછાનું (-) ચિન્હ કરવું. ને વતું હોય તો (+) વત્તાનું ચિન્હ કરવું. એજ રીતે બીજીવાર બીજી સંખ્યા ધારી સંકેત પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી આપેલા ફળ સાથે સરખાવી વત્તા કે ઓછાનું ચિન્હ કરવું. પછી પહેલી ધારેલી સંખ્યાનો ને બીજી ધારેલી સંખ્યાના ફળની બાદબાકીનો ગુણુકાર કરવો. તથા બીજી ધારેલી સંખ્યાનો ને પેહેલી ધારેલી સંખ્યાના ફળનો ગુણુકાર કરવો. હવે જો ફળોની બાદબાકીનાં ચિન્હ સંજ્ઞાતિય હોય તો આ ગુણુકારોની બાદબાકી. ને વિગતનિય ચિન્હ હોય તો સરવાળો કરી તે સરવાળાને કે બાદબાકીને ફળોના સરવાળાએ કે બાદબાકીએ ભાગવાથી જવાબ આવશે.

કારણ-ઈષ્ટરાશિનું કારણ સમજવાને અંકગણિતના કેટલાક નિયમો કે પ્રત્યક્ષપ્રમાણો જાણવાં જોઈએ. એમાંના કેટલાક પાછળ આવી ગયા છે. તો પણ તે આ ટેકાણે જરૂરના હોવાથી ફરીને લખ્યા છે.

૧ ખોટી ધારેલી સંખ્યા, ખરી સંખ્યા અથવા જવાબ કરતાં નાની હોય તો ખરી સંખ્યાનું જે ફળ આપ્યું હોય તે કરતાં ખોટી સંખ્યાનું ફળ ઓછું આવશે, ને તેથી ફળોની બાદબાકી આગળ ઓછાનું ચિન્હ કરવું પડશે. પણ જો ધારેલી સંખ્યા જવાબ કરતાં ખોટી હશે તો ધારેલી સંખ્યાનું ફળ જવાબના ફળ કરતાં મોટું આવશે. તેથી ખતે ફળોની બાદબાકી આગળ વત્તાનું ચિન્હ આવશે.

૨ પહેલી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી જેમ બીજી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે, તેમ પહેલી ફળોની બાદબાકી તે બીજી ફળોની બાદબાકીને છે. અથવા પેહેલી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી જેમ તે,

ના ફળની બાદબાકીને છે તેમ બીજી ધારેલી સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકી તે તેના ફળની બાદબાકીને છે.

૩ બંને ફળોની બાદબાકી સગ્નાતિય હશે તો—એ બે ફળોની બાદબાકીની બાદબાકી જેમ ધારેલી બે સંખ્યાની બાદબાકીને છે, તેમ બેમાંની એક બાદબાકી તે, તે બાદબાકી જે સંખ્યા ઉપરથી કઢાડી હશે તે સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે. પણ જો ફળોની બાદબાકી વિગ્નાતિય હશે તો—એ બે બાદબાકીનો સરવાળો જેમ ધારેલી બે સંખ્યાની બાદબાકીને છે તેમ એ બેમાંની એક બાદબાકી તે, તે બાદબાકી જે સંખ્યા ઉપરથી કઢાડી હશે તે સંખ્યા ને જવાબની બાદબાકીને છે.

૪ ચાર પદો પ્રમાણમાં હોય તો પહેલા ને બીજાનો ભાગાકાર તે, ત્રીજા ને ચોથાના ભાગાકારની બરાબર છે.

૫ બે બરાબરનાં પદોમાં બરાબર સંખ્યા ઉમેરીએ—અથવા બાદ કરીએ તો તે સરવાળો અથવા બાદબાકી બરાબર રહેશે.

૬ બે અપૂર્ણાંક બરાબર હોય તો પહેલા અપૂર્ણાંકના અંશ જેમ બીજા અપૂર્ણાંકના અંશને છે, તેમ પહેલાનો છેદ તે બીજાના છેદને છે.

આ બધા નિયમો તથા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો દાખલો લીધાથી તરત ધ્યાનમાં આવશે માટે એક દાખલો લઈએ. જેમકે તે સંખ્યા કયી છે કે જેમાંથી વીસ બાદ કરી ચારે ભાગી ૩૦ ઉમેરીએ તો સરવાળો ૫૦ થાય છે. આ દાખલામાં જવાબ ૧૦૦ આવશે. હવે દિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે સંખ્યા ધારી ફળ ઉત્પન્ન કરવા પ્રથમ ૪૦ અને ફરી ૧૪૦ સંખ્યાઓ ધારી તો પહેલી ધારેલી સંખ્યા ઓછી છે માટે

| | | |
|------|-------|---------------------------------------|
| ૪૦ | ૧૪૦ | (૧) કુળોની બાદબાકી ૧૫ ઓછી |
| ૨૦ | ૨૦ | આવી અને બીજી મારેલી સં- |
| ૪)૨૦ | ૪)૧૨૦ | ખ્યા જવાબ કરતાં મોટી છે |
| ૫ | ૩૦ | માટે કુળોની બાદબાકી ૧૦૫- |
| ૩૦ | ૩૦ | તી આવી. |
| ૩૫ | ૬૦ | (૨) નીચમ પ્રમાણે પ્રમાણમાં માંડયું તે |
| ૫૦ | ૫૦ | ૬૦:૪૦::૧૫:૧૦ |
| -૧૫ | + ૧૦ | અથવા બીજી રીતે માંડયું તે |
| | | ૬૦:૧૫::૪૦:૧૦ |

(૩) ત્રીજા નિયમમાં કહ્યા પ્રમાણે કુળોની બાદબાકી ને સમતિય ચિન્હ લાવવાને પહેલી ૪૦ અને ૬૦ સંખ્યા ધારી તે ૪૦ ઉપરથી કુળોની બાદબાકી-૧૫ અને ૬૦ ઉપરથી કુળોની બાદબાકી-૧૦ આવશે. તે ઉપરથી પ્રમાણમાં માંડયું તે ૫:૨૦::૧૫:૬૦

તેમજ ૪૦ ને ૧૪૦નાં કુળોની બાદબાકી વિજ્ઞાત્ય છે માટે તે ઉપરથી પ્રમાણ માંડયું તે ... ૨૫:૧૦૦::૧૫:૬૦

ટીકા-ઉપર માંડી બતાવેલાં બધાં પ્રમાણો ખરાં છે. કેમકે પ્રમાણમાં કહેલા નિયમ પ્રમાણે તેમાંના આદિને અંત પહોંના ગુણાકાર તે વચલાં બે પહોંના ગુણાકારની બરાબર છે અને તેથી એ ત્રણે નિયમો ખરા છે એવું સમજાશે.

(૪) આ નિયમ સમજાવવાને ઉપરનું છેલ્લું પ્રમાણ ૨૫:૧૦૦::૧૫:૬૦ લીધું તે $\frac{૨૫}{૧૦૦} = \frac{૧૫}{૬૦}$ છે.

(૫) ઉપરના બે બરાબર પદમાં ચાર ઉમેરીશું તે $\frac{૨૫}{૧૦૦} + ૪ = \frac{૧૫}{૬૦} + ૪$ અથવા $\frac{૪૨૫}{૬૦} = \frac{૨૫૫}{૬૦}$ એ પણ બરાબર છે. તેમજ બંનેમાંથી $\frac{૧}{૬૦}$ બાદ કર્યાથી પણ બાદબાકી બરાબર થશે.

(૬) $\frac{૨૫}{૬૦} = \frac{૧૫}{૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણમાં માંડીશું તે ૨૫:૧૫::૧૦૦:૬૦ આ પ્રમાણે યશે ને તે પ્રમાણ પણ ખરું છે.

ઉપરના નિયમો બરાબર ધ્યાનમાં રાખ્યાથી ઇષ્ટરા-
શીનું કારણ સમજાશે. માટે એક દાખલો રીત પ્રમાણે આ
ઠેકાણે ગણી બતાવ્યો છે.

| | |
|-----------------------|---------------------------|
| પ્રથમ ૪૦ ધાર્યા તો ૪૦ | બીજાવાર ૧૪૦ ધાર્યા તો ૧૪૦ |
| <u>૨૦</u> | <u>૨૦</u> |
| ૪/૨૦ | ૪/૨૦ |
| <u>૫</u> | <u>૩૦</u> |
| ૩૦ | ૩૦ |
| <u>૩૫</u> | <u>૬૦</u> |
| ૫૦ | ૫૦ |
| <u>-૧૫</u> | <u>+૧૦</u> |

વિભતિય ચિન્હ છે માટે

$$\text{જવાબ} = \frac{૪૦ \times ૧૦ + ૧૪૦ \times ૧૫}{૧૫ + ૧૦} = \frac{૨૫૦૦}{૨૫} = ૧૦૦$$

આ હિસાબમાં કહ્યા પ્રમાણે ફળ ઉત્પન્ન કરી તેની
ને આપેલા ફળની બાદબાકી ઉત્પન્ન કરી છે. હવે ૪૦ને
૧૦નો ને ૧૪૦ને ૧૫નો ગુણાકાર કરી તેના સરવાળાને ૧૦
ને ૧૫ના સરવાળાએ ભાગ્યાથી શા માટે જવાબ આવ્યો
તેનું કારણ તપાસીએ.

પાછળ કહેલા ત્રીજા નિયમમાં કહ્યું છે કે 'ફળોની
બાદબાકીનાં ચિન્હ વિભતિય હોય તો તે બંને બાદબાકીઓ-
નો સરવાળો : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: બેમાંની
એક બાદબાકી તે : તે બાદબાકી જે ધારેલી સંખ્યા ઉપર-
થી કઢાડી છે તેનીને જવાબની બાદબાકીને. એટલે આ હિસાબમાં

૧૫+૧૦:૧૪૦-૪૦::૧૫: જવાબ-૪૦ આ પ્રમાણે
પ્રમાણ થયું. તેથી આદિ અંતનો ગુણાકાર તે વચલાં બે
મધ્યપદોના ગુણાકારની બરાબર છે માટે:—

$$(૧૫+૧૦) (જવાબ-૪૦) = (૧૪૦-૪૦) \times ૧૫ \text{ તેથી } ૧૫$$

$\times(\text{જવાબ}-૪૦)+૧૦(\text{જવાબ}-૪૦)=૧૪૦\times ૧૫-૪૦\times ૧૫$ તેથી
 $૧૫\times \text{જવાબ}-૧૫\times ૪૦+૧૦\times \text{જવાબ}-૧૦\times ૪૦=૧૪૦\times ૧૫-૪૦\times ૧૫$ આ બંને બરાબર છે તેથી- ૧૫×૪૦ બંને તરફથી
 કઢારી નાંખ્યા તો:—

$૧૫\times \text{જવાબ}+૧૦\times \text{જવાબ}-૧૦\times ૪૦=૧૪૦\times ૧૫$
 બરાબર રહ્યા. તેમાં ૧૦×૪૦ બંને તરફ ઉમેર્યા તો $૧૫\times$
 $\text{જવાબ}+૧૦\times \text{જવાબ}=૧૪૦\times ૧૫+૧૦\times ૪૦$ થયા
 કેમકે ગાળી બાજુમાં ૧૦×૪૦ ઓછા હતા ને એટલાજ
 વધા આવ્યા એટલે આવ્યા તેટલા ઓછા કરવાના હતા
 તેથી બરાબર થઇ રહ્યા ને જમણી બાજુમાં ૧૦×૪૦ વધ્યા.
 માટે $૧૫\times \text{જવાબ}+૧૦\times \text{જવાબ}=૨૫\times \text{જવાબ}=૧૪૦\times ૧૫$
 $+૪૦\times ૧૦$ થયા તેથી બંને તરફ ૨૫એ ભાગ્યા તો જવાબ
 $= \frac{૧૪૦\times ૧૫+૪૦\times ૧૦}{૨૫}$ આ ઉપરથી પ્રથમ કરેલી રીત કેમ
 થઇ તે સમજશે.

સજ્જતિય ચિન્હ આવે માટે એજ દાખલો ફરી કર્યોતો:—

| | |
|--------------|--|
| પ્રથમ ૧૨૦ | ૧૪૦ બીજીવાર ધાર્યા |
| ૨૦ | ૨૦ |
| <u>૪)૧૦૦</u> | <u>૪)૧૨૦</u> આ સજ્જતિય ચિન્હ છે |
| ૨૫ | ૩૦ માટે રીત પ્રમાણે કર્યાતો |
| ૩૦ | ૩૦ જવાબ $= \frac{૧૨૦\times ૧૦-૧૦\times ૫}{૧૦-૫} = ૧૦૦$ |
| <u>૫૫</u> | <u>૬૦</u> |
| ૫૦ | ૫૦ |
| <u>૫૫</u> | <u>૫૦</u> |
| +૫ | +૧૦ |

આ રીતનું કારણ—ત્રીજા નિયમમાં કહ્યા પ્રમાણે ૩૦
 $-૫:૧૪૦-૧૨૦::૫:૧૨૦-$ જવાબને. તેથી આદિ અંતનો
 ગુણકાર વચલાં બે પદોના ગુણકારની બરાબર છે.

$(૧૦-૫)(૧૨૦-\text{જવાબ})=(૧૪૦-૧૨૦)\times ૫$ અથવા

$$૧૦ (૧૨૦ - જવાબ) - ૫(૧૨૦ - જવાબ) = ૧૪૦ \times ૫ - ૧૨૦ \times ૫$$

$$\text{અથવા } ૧૦ \times ૧૨૦ - ૧૦ \times જવાબ - ૫ \times ૧૨૦ + ૫ \times જવાબ =$$

$$૧૪૦ \times ૫ - ૧૨૦ \times ૫$$

બંને તરફથી -૫×૧૨૦ બાદ કર્યા તો $૧૦ \times ૧૨૦ - ૧૦ \times જવાબ + ૫ \times જવાબ = ૧૪૦ \times ૫$

$$\text{અથવા } ૧૦ \times ૧૨૦ - ૧૦ જવાબ + ૫ જવાબ = ૧૪૦ \times ૫$$

$$\text{અથવા } ૧૦ \times ૧૨૦ - ૫ જવાબ = ૧૪૦ \times ૫$$

બંને તરફથી ૧૪૦×૫ બાદ કર્યા તો $૧૦ \times ૧૨૦ - ૫ જવાબ - ૧૪૦ \times ૫ = ૦$

બંને તરફ પાંચ જવાબ ઉમેર્યા તો $૧૦ \times ૧૨૦ - ૧૪૦ \times ૫ = ૫ જવાબ$. બંને તરફ પાંચે ભાગ્યા તો $\frac{૧૦ \times ૧૨૦ - ૧૪૦ \times ૫}{૫} = જવાબ$. આ ઉપરથી ઉપરની રીતનું કારણ સમજાશે.

બીજી રીત.—એ વાર સંખ્યાઓ ધારી ઉપર પ્રમાણે ક્રોની બાદબાકી કરવી. પછી બાદબાકીઓનાં ચિન્હ સળતિય હોયતો બંને બાદબાકીઓની બાદબાકી : બંને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: એમાંની એક બાદબાકી : તે બાદબાકીવાળી ધારેલી સંખ્યા—જવાબને છે. આ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધી ગણવા. જે જવાબ આવશે તે ધારેલી સંખ્યાને જવાબની બાદબાકી આવશે, માટે ધારેલી સંખ્યામાંથી તે બાદ કર્યાથી જવાબ આવશે. જેમકે ઉપરનો દાખલો લીધો તો:—

| | | |
|--------------|--------------|--|
| ૧૨૦ | ૧૪૦ | ઉપરની રીતે પ્રમાણ |
| ૨૦ | ૨૦ | માંડ્યું તો $૧૦ - ૫ : ૧૪૦ -$ |
| <u>૪)૧૦૦</u> | <u>૪)૧૨૦</u> | $૧૨૦ :: ૫ : ૧૨૦ - જવાબ$ |
| ૨૫ | ૩૦ | તેથી બીજા ને ત્રીજા |
| ૩૦ | ૩૦ | પદના ગુણકારને આદિ |
| <u>૫૫</u> | <u>૬૦</u> | પદે ભાગ્યા તો અંતપદ |
| ૫૦ | ૫૦ | આવશે એટલે:— |
| <u>+૫</u> | <u>+૧૦</u> | $\frac{(૧૪૦ - ૧૨૦) \times ૫}{૧૦ - ૫} = ૨૦$ |

ચોથું પદ આપ્યું. તે $૧૨૦ - જવાબ છે માટે જવાબ = ૧૨૦ - ૨૦ = ૧૦૦$

ઉપરની બીજી રીતનું કારણ—બીજા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો $૧૦ : ૫ :: ૧૪૦ - જવાબ : ૧૨૦ - જવાબ$. આ પ્રમાણે પ્રમાણ થયું તેથી ચોથા નિયમ પ્રમાણે

$$\frac{૧૦}{૫} = \frac{૧૪૦ - જવાબ}{૧૨૦ - જવાબ} \quad \text{અને બરાબરની બાબતમાંથી ૧ બાદ}$$

$$\frac{૧૦}{૫} - ૧ = \frac{૧૪૦ - જવાબ}{૧૨૦ - જવાબ} - ૧,$$

$$\text{સમચ્છેદ કર્યો તો } \frac{૧૦ - ૫}{૫} = \frac{(૧૪૦ - જવાબ) - (૧૨૦ - જવાબ)}{૧૨૦ - જવાબ},$$

$$\text{અથવા } \frac{૧૦ - ૫}{૫} = \frac{૧૪૦ - જવાબ - ૧૨૦ + જવાબ}{૧૨૦ - જવાબ}$$

જમણી બાબતના અંશમાં એકવાર જવાબ ઓછો ને એકવાર

$$\text{વધો છે માટે અને ઉડી ગયાથી } \frac{૧૦ - ૫}{૫} = \frac{૧૪૦ - ૧૨૦}{૧૨૦ - જવાબ} \text{ તેથી}$$

છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો : $૧૦ - ૫ : ૧૪૦ - ૧૨૦ :: ૫ : ૧૨૦ - જવાબ$. રીતમાં કહેલું પ્રમાણ આ રીતે ઉપન થયું છે.

જો વિગતિય ચિન્હ હોય તો અને બાદબાકીઓનો સરવાળો : અને ધારેલી સંખ્યાની બાદબાકીને :: એમાંની એક બાદબાકી : બાદબાકી વાળી સંખ્યાને જવાબની બાદબાકીને છે. આ પ્રમાણે પ્રમાણ કરી ઉપરની રીત પ્રમાણે ગણી જવાબ કહાડવો. એટલે પ્રથમનો દાખલો લઈ

| | | |
|------|-------|---------------------------------------|
| ૪૦ | ૧૪૦ | પ્રમાણ બાંધ્યું તો :— |
| ૨૦ | ૨૦ | $૧૫ + ૧૦ : ૧૪૦ - ૪૦ :: ૧૦ : ૧૪૦ - જ$ |
| ૪)૨૦ | ૪)૧૨૦ | વાબ. બીજાને ત્રીજા પદના ગુણા- |
| ૫ | ૩૦ | કારને પેહેલા પદે લાગ્યા તો |
| ૩૦ | ૩૦ | $(૧૪૦ - ૪૦) \times ૧૦ = ૧૪૦ - જ. છે.$ |
| ૩૫ | ૬૦ | $\frac{૧૫ + ૧૦}{૧૫ + ૧૦}$ |
| ૫૦ | ૫૦ | માટે $૧૪૦ - જવાબ = ૪૦$ આવ્યા, |
| -૧૫ | +૧૦ | |

તેથી $૧૪૦-૪૦=જવાબ$. એટલે જવાબ=૧૦૦ આલ્યા.

ઉપરની રીતનું કારણ—બીજા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો $૧૫ : ૧૦ :: જવાબ-૪૦ : ૧૪૦-જવાબ$.

આબીસ જવાબ કરતાં ઓછા છે કેમકે ફળ ઓછું આવ્યું છે માટે જવાબમાંથી ૪૦ બાદ કર્યા. ને ૧૪૦ જવાબ કરતાં વધારે છે કેમકે ફળ મોટું આવ્યું છે, માટે ૧૪૦માંથી જવાબ બાદ કર્યા.

ઉપરના પ્રમાણને ચોથા નિયમ પ્રમાણે લખ્યા તો

$$\frac{૧૫}{૧૦} = \frac{જવાબ-૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$$

બંને બરાબરના પદમાં એક ઉમેર્યો તો $\frac{૧૫}{૧૦} + ૧ = \frac{જવાબ-૪૦}{૧૪૦-જવાબ} + ૧$

સમઘેદ કર્યો તો $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦} = \frac{જવાબ-૪૦+૧૪૦-જવાબ}{૧૪૦-જવાબ}$

જમણી તરફના અંશમાં એકવાર જવાબ વતો ને એકવાર ઓછો છે માટે બંને ઉડી ગયા. તેથી $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦} = \frac{-૪૦+૧૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$ રહ્યા. અથવા $\frac{૧૫+૧૦}{૧૦} = \frac{૧૪૦-૪૦}{૧૪૦-જવાબ}$ આલ્યા.

તે ઉપરથી છઠ્ઠા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણ બાંધ્યું તો $૧૫+૧૦ : ૧૪૦-૪૦ :: ૧૦ : ૧૪૦-જવાબ$. રીતમાં કહેલું પ્રમાણ એ રીતે ઉત્પન્ન થયું છે.

ઘાત પ્રકરણ.

કોઈ સંખ્યા બે વાર મૂકીને તેનો ગુણાકાર કરીએતે ગુણાકારને તે સંખ્યાનો બે ઘાત કે વર્ગ કહેછે. કેમકે પાંચે ગુણીએ તો ૨૫ આવે. તે પાંચનો બે ઘાત કે વર્ગ કહેવાય. પાંચનો વર્ગ બતાવવાને પાંચને માથે બે લખાય છે. જેમકે ૫^૨. એ બગડાને ઘાત પ્રકાશક કે ઘાત બતાવનાર અંક કહેછે. એજ પ્રમાણે પાંચને ત્રણ વાર મૂકીને અથવા ત્રણ વાર ગુણીએ તેને પાંચનો ત્રણ ઘાત કે

ધન કહે છે. જેમકે $૫ \times ૫ \times ૫ = ૧૨૫$ એ પાંચનો ધન કહેવાય. પાંચનો ધન બતાવવાને $૫^૩$ પણ લખાય. એજ પ્રમાણે ચતુર્ધાત પંચધાતને માટે પણ જાણવું.

એકનો કોઇ પણ ધાત એકજ આવે છે. કેમકે એ કને ગમે તેટલી વાર એકે ગુણીએ તો ગુણાકાર એકજ રહે છે. પણ અપૂર્ણાંકનો જેમ જેમ ધાત વધારતા જઇએ તેમ તેમ કીમત ઘટતી જાય છે, કેમકે કોઈ અપૂર્ણાંકને ને ૪ રકમે ગુણવાથી તેનો ગુણાકાર તેટલા ગણો ઓછો આવે છે.

કોઇ સંખ્યાનો ચતુર્ધાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને ચાર વાર ગુણવી અથવા વર્ગ કરી તેને વર્ગે ફરીને ગુણવી, જેમકે $૫^૪ = ૫ \times ૫ \times ૫ \times ૫ = ૬૨૫$ અથવા $૫^૪ = ૫ \times ૫ = ૨૫ \times ૨૫ = ૬૨૫$ એટલે ચતુર્ધાત કરવો હોય તો બે ધાતને બે ધાતે ગુણવા, પંચધાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને પાંચવાર ગુણવી અથવા ધનને વર્ગનો ગુણાકાર કરવો, જેમકે $૨^૫ = ૨ \times ૨ \times ૨ \times ૨ \times ૨ = ૩૨$ અથવા $૨^૩ = ૮$ તે $૨^૨ = ૪$ એ બેનો ગુણાકાર $૮ \times ૪ = ૩૨$, એટલે પંચધાત કરવો હોય તો ત્રણ ધાતને બે ધાતનો ગુણાકાર કરવો. તેમજ કોઇ સંખ્યાનો છ ધાત કરવો હોય તો તે સંખ્યાને છ વાર ગુણવી અથવા ત્રણ ધાતને ત્રણ ધાતે ગુણવા અથવા ચાર ધાતને બે ધાતે ગુણવા.

આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઈ સંખ્યાના કોઇ ધાતનો ને તેજ સંખ્યાના બીજા કોઇ ધાતનો ગુણાકાર કરીએ તે ગુણાકાર એ ધાતોના સરવાળા જેટલો ધાત થાય. જેમકે $૪^૫ \times ૪^૩$ એ બેનો ગુણકાર $૪^૮$ થાય. તેમજ $૪^૨ \times ૪^૩ = ૪^૫$ આવે. ઇત્યાદિ.

કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ કરવો હોય તો પાંચ રીતે થાય છે.

(૧) તે સંખ્યાને તેજ સંખ્યાએ ગુણવાથી. જેમકે $૫^૨ = ૫ \times ૫ = ૨૫$

(૨) તે સંખ્યાના બે કે વધારે ભાગ કરી તે દરેક ભાગે આખી સંખ્યા સાથે ગુણી તે ગુણાકારોનો સરવાળો

કરવાથી, જેમકે $૧૨^૨$ કરવા હોય તો તેના ૧૦ને ૨ એવા બે ભાગ કર્યા, તે $૧૦^૨ = ૧૦ \times ૧૨ + ૨ \times ૧૨ = ૧૪૪$

(૩) તે સંખ્યાના બે ભાગ કરી તે દરેક ભાગના વર્ગોના સરવાળામાં તે બે ભાગોના ગુણાકારની બમણાઈ ઉમેરવાથી, જેમકે $૧૮^૨ = ૧૦^૨ + ૮^૨ + ૧૦ \times ૮ \times ૨ = ૩૨૪$

(૪) તે સંખ્યાના અર્ધના વર્ગની ચોગણાઈ બરાબર અથવા તેના એવા ભાગના વર્ગની ૧૬ ગણાઈ બરાબર, જેમકે $૮^૨ = ૮^૨ \times ૪$ અથવા $૨^૨ \times ૧૬ = ૬૪$

(૫) કોઈ મોટી સંખ્યાનો વર્ગ કરવો હોયતો:—
તે સંખ્યા લખ્યા પછી તેની નીચે લોટી દોરી એક આડી હારમાં દરેક આંકડાનો વર્ગ લખવો. જે આંકનો વર્ગ એક આંક થાય તેની ડાબી બાજુએ મીડું મૂકી બે આંક પૂરા કરવા. મનલખકે જેટલા આંકનો વર્ગ કરવો હોય તેથી જમણા આંક થતા બેઠએ, બે સંખ્યામાં મીડું હોય તો તેના વર્ગના સ્થાને બે મીડાં લખવાં. પછી સંખ્યામાંના મોટા એટલે કે ડાબા હાથ બાજુના આંકની બમણાઈએ બાકીના આંકડા સાથે ગુણી તે ગુણાકાર ઉપલા વર્ગ કરેલા આંકડાઓની નીચે, જેટલા આંકડા સાથે ગુણ્યા હોય તેટલા આંકડા જમણા હાથ તરફના કાપોને લખવો. પછી તેની પાસેના જમણા હાથ બાજુના આંકડાની બમણાઈએ બાકીના જમણા હાથ બાજુના આંકડા સાથે ગુણી જેટલા આંકડા સાથે ગુણ્યા હોય તેટલા આંકડા કાપો ઉપર પ્રમાણે મૂકવો. પછી તેની પાસેનો જમણા હાથ બાજુનો આંકડો લેઈ બાકીના જમણા હાથ બાજુના આંકડા સાથે ગુણી, ઉપર પ્રમાણે મૂકવો. એ પ્રમાણે દશકના આંકડાની બમણાઈએ એકમ સાથે ગુણી તે ગુણાકાર દશક નીચે મૂકવો. એકમની બમણાઈએ કોઈ આંકડા સાથે ગુણવાના નથી, માટે ન ગુણવા. પછી સરવાળો કરવો. એ જવાબ. જેમકે ૧૦૨૩૪૫ નો વર્ગ કરવો હોયતો:—

| | |
|-------------------------------------|-----------------|
| ૧૦૨૩૪૫ તેમજ ૧૨૫નોવર્ગ કરી હોયતો ૧૨૫ | |
| <u>૧૦૦૦૪૦૦૬૧૨૫</u> | <u>૧૦૪૨૫</u> |
| ૪૬૦૦ | ૫૦ |
| ૧૩૮૦ | ૨૦ |
| ૨૭૦ | <u>૧૫૬૨૫ જ.</u> |
| ૪૦ | |

૧૦૪૭૪૪૦૦૨૫ જવાબ.

કારણ—કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ તે, તેના દરેકભાગના વર્ગ વત્તાને જે ભાગોના ગુણાકારના બમણાછ ઉમેરતો. ૧૨૫નો વર્ગ કરવો હોય તો $૧૦૦+૨૦+૫$ એ ત્રણ ભાગને, ને દરેક ભાગનો વર્ગ કરી સરવાળો લેઈશું તો $૧૦૦૦૦+૪૦૦+૨૫=૧૦૪૨૫$ આવશે. એટલેજે આંકડાનો વર્ગ એક આંક આવે છે તેની પાછળ મીડું આવેછે. આ દાખલામાં બેનો વર્ગ ચાર એક આંક આવ્યો તો તેની પાછળ મીડું આવ્યું. અને ત્રીજા ઉપરનો નિયમ કહાડ્યો કે જેનો વર્ગ એક આંક આવે તેની પાછળ મીડું મુકવું. હવે તે ભાગોના ગુણાકારની બમણાછ ઉમેરવી જોઈએ એટલે સોનો વીશ ને પાંચ સાથે ને વીશનો પાંચ સાથે એમ અરસ્પરસ ગુણાકાર કરી તેની બમણાછ ઉમેરવી જોઈએ, તેથી સોની બમણાછ બસેએ પાંચ સાથે ને વીશ સાથે ગુણ્યા એટલે પાંચ હજાર આવ્યા. પણ સંખ્યા લખવામાં સો ઉપર જે મીડાં આવતાં નથી માટે એ આંક કાપીને ગુણાકાર લખ્યો એટલે એકસોની બમણાછ બેને પચીસનો ગુણાકાર પચાસ જે આંક કાપીને લખ્યો, તેમજ વીશની બમણાઈનો ને પાંચનો ગુણાકાર બસે આવ્યો પણ વીશમાં મીડું લખાતું નથી, તેથી જે દશકની બમણાછ ચારનો ને પાંચનો ગુણાકાર વીશ એક આંક કાપીને લખ્યોછે. એમાં બધા આંકોનો અરસ્પરસ ગુણાકાર આવી ગયો. માટે પાંચની બમણાઈએ કોઈ આંક સાથે ગુણ્યા નથી. એ ઉપરથી

ઉપરનો નિયમ નીકળ્યો છે.

(૧) કોઈ સંખ્યાનો ધન કરવો હોય તો તે સંખ્યાને ત્રણવાર ગુણવી.

(૨) અથવા તે સંખ્યાના બે ભાગ કરી તે ભાગોના ધનના સરવાળામાં તે ભાગોના ગુણાકારની ત્રમણાઈને આપી સંખ્યાએ ગુણી ઉમેરવા.

(૩) અથવા તે સંખ્યાના બંને ભાગોના ધનમાં પહેલા ભાગના વર્ગની ત્રમણાઈએબીજ ભાગનેઅને બીજા ભાગના વર્ગની ત્રમણાઈ એ પહેલા ભાગને ગુણી, એ બંને ગુણાકાર ઉમેરવા.

(૪) પણ જો કાંઈ સંખ્યાના ત્રણ અંક હોય તે તેના ધન કરવો હોય તો પણ તેના બે ભાગ પાડવા એટલે એક ભાગમાં બે અંક ને એક ભાગમાં એક અંક રાખી પૂછી ઉપરની ત્રીજી રીતે ધન કરવો.

(૫) અથવા જો ત્રણ અંક રાખી ધન કરવો હોય તો દરેક અંકના ધનમાં તે દરેક અંકના વર્ગની ત્રમણાઈએ બાકીના અંક સાથે ગુણી તે ગુણાકાર અને તે ત્રણ અંકોના ગુણાકારની છગણાઈ એટલું ઉમેરવું. જેમકે

$૧૨૪ = ૧૨૦ + ૪$ એ બે ભાગ લીધાતો ઉપરની ચોથી રીત પ્રમાણે
 $૧૨૦^૩ + ૪^૩ + ૧૨૦^૨ \times ૩ \times ૪ + ૪^૨ \times ૩ \times ૧૨૦ = ૧૯૦૬૬૨૪$ અ-
 થવા જો ત્રણ અંક રાખી ધન કરવો હોય તો $૧૨૪^૩ = ૧૦૦^૩$
 $+ ૨૦^૩ + ૪^૩ + ૧૦૦^૨ \times ૩ \times ૨૪ + ૨૦^૨ \times ૩ \times ૧૦૪ + ૪^૨ \times ૩ \times ૧૨૦$
 $+ ૧૦૦ \times ૨૦ \times ૪ \times ૬ = ૧૯૦૬૬૨૪$ આવશે.

કોઈ સંખ્યા કયાં સંખ્યાનો કોઈ ધાત થએલો છે, તે મૂળ સંખ્યાને તે ધાત સંખ્યાનું મૂળ કહે છે. જેમકે ૩૬ એ છનો વર્ગ છે, માટે ૩૬નું છ એ બે ધાત મૂળ કહેવાય. બે ધાત મૂળને વર્ગ પણ કહે છે. તેમજ ૬૪ એ ચારનો ધન છે. માટે ૬૪નો ૪ એ ત્રણ ધાત મૂળ કે ધનમૂળ કહેવાય.

કોઈ સંખ્યાનું ધાતમૂળ બતાવવાને ✓ ચિન્હ કરે છે. ને તેમાં તે ધાતનો અંક લખેછે. જેમકે ૬૪ નું ત્રણ ધાતમૂળ બતાવવું હોય, તો ✓ ૬૪ આ પ્રમાણે, ને ચતુર્ધાતમૂળ બતાવવું હોય, તો ✓ ૬૪ લખાય. પણ વર્ગમૂળ બતાવવાને અંદર બે નહીં લખતાં માત્ર ચિન્હજ લખે છે. જેમકે ૩૬ નું બે ધાતમૂળ બતાવવું હોય તો ✓ ૩૬ લખાય. ધાતમૂળ બતાવવાની બીજી રીત પણ છે, એટલે તે સંખ્યાને માથે ધાતમૂળનો અંક એકના છેદમાં લખાયછે. જેમકે ૬૪ નું ત્રણ ધાતમૂળ ૬૪^૩ અને ૬૪ નું ચતુર્ધાતમૂળ ૬૪^૪, ૩૬ નું વર્ગમૂળ ૩૬^૨ આ પ્રમાણે લખાય છે. પણ કોઈ સંખ્યાના કોઈ ધાતનું કોઈ ધાતમૂળ બતાવવું હોય, ત્યારે તે ધાતનો અંક અંશમાં ને ધાતમૂળનો અંક છેદમાં લખી તે અપૂર્ણાંક તે સંખ્યાને માથે લખાયછે. જેમકે ૮ ના વર્ગનું ત્રણ ધાતમૂળ બતાવવું હોય, તો ૮^૩ લખાય. અથવા ચિન્હ કરીને અંદર ૩ લખે, જેમકે ૮^૩ લખાય. ૬૨ ના ત્રણ ધાતનું ચતુર્ધાતમૂળ ૬૨^૪ અથવા ✓ ૬૨ આ પ્રમાણે બેરીતે લખાયછે. આઠનો વર્ગ ૬૪ માટે ૬૪ એ ધાત સંખ્યા ને ૮ એ મૂળ સંખ્યા. પણ જેનું મૂળ નીકળતું નથી એટલે જે સંખ્યા કોઈ સંખ્યાનો ધાત નથી, તે સંખ્યાને કરણી રૂપ સંખ્યા કહેછે. જેમકે ૨, ૫, ૬, ૭ ઇ.

કોઈ સંખ્યાનું મૂળ તે સંખ્યા કરતાં ઓછું આવે, પણ એકનું કયું પણ મૂળ એકજ આવે. અપૂર્ણાંકનું મૂળ ધાત ગણું વધારે આવે. જેમકે ૩ નું વર્ગમૂળ ૧, ૩^૨ નું ધનમૂળ ૩, ૬ નું વર્ગમૂળ ૩ ઇ.

વર્ગમૂળમાં ચિન્હ મૂકવાનું કારણ-કોઈ સંખ્યાના

વર્ગમાં વધારેમાં વધારે તે સંખ્યાના બમણા કરતાં વધારે અંકો આવશે નહીં. ને ઓછામાં ઓછા બમણા કરતાં એક ઓછો, એથી ઓછા અંક આવશે નહીં. એટલે એક અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે બે, ને ઓછામાં ઓછા એક અંક આવશે. બે અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે ચાર, ને ઓછામાં ઓછા ત્રણ અંક આવશે. પાંચ અંકના વર્ગમાં વધારેમાં વધારે ૧૦ ને ઓછામાં ઓછા નવ અંક આવશે. જેમકે ઓછામાં ઓછી એક અંકની સંખ્યા ૧ અને વધતામાં વધતી ૯ છે. તેનો વર્ગ ૧ અને ૮૧ આવશે. બે અંકની ઓછામાં ઓછી ૧૦ અને વધતામાં વધતી ૯૯ છે, તેનો વર્ગ ૧૦૦ અને ૯૮૦૧ આવશે. એ ઉપરથી સમજાય છે કે કોઈ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો તે સંખ્યામાં એક કે બે અંક હશે, તો તેનું વર્ગમૂળ એક અંક, ત્રણ કે ચાર અંક હશે તો બે અંક, પાંચ કે છ અંક હશે તો ત્રણ અંક આવશે. ૫૬૨૧૮ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો તેમાં ત્રણ આવશે. કેમકે ચાર અંક સુધીમાં તો બે અંક આવે, પણ પાંચ અંક છે, તેથી ત્રણ અંક આવશે, એટલે ૧૮ નું એક અંક, ૬૨૧૮ નું બે અંક ને ૫૬૨૧૮ નું ત્રણ અંક આવ્યું, તે ઉપરથી એ પાંચ અંકોના ત્રણ ભાગ પાડ્યા. ૫, ૬૨, ૧૮ તેમના ઉપર નિશાની કરી, તો તરત માલમ પડશે. જેમકે ૫૬૨૧૮ મૂળમાં ત્રણ અંક આવશે. તેમાં પહેલો સોનો, બીજો દશકનો, ને ત્રીજો એકમનો આવશે. એટલે દશ હજારના સ્થાન ૫ માંથી સોનો અંક નીકળશે, ને બાકીના બેમાંથી દશક ને એકમ નીકળશે. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે, કે જે સંખ્યાનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તે સંખ્યાના એકમ અથવા પહેલા અંક ઉપર, ત્રીજા અંક ઉપર, પાંચમા અંક ઉપર એમ ચિન્હ કરવાં.

વર્ગમૂળની રીતનું કારણ-કોઈ સંખ્યાના વર્ગમૂળમાં બે

(૭૫)

કરતાં વધારે અંક હોય, તો તે સંખ્યા, તે અંકના વર્ગોના સરવાળામાં ડાળા હાથ બણીથી દરેક અંકની જમણાઈને તેની પછીના અંકના સરવાળાનો ગુણાકાર ઉમેરીએ, તેની બસેબર હોવી જોઈએ. આનું કારણ વર્ગ કરવાની પાંચમી રીત ઉપરથી સમજાશે.

જેમકે-૬૧૩૦૮૯ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો-

$$૬૧૩૦૮૯ (૭૦૦+૮૦+૯)=૭૮૩.$$

$$૭૦૦^૨=૪૯૦૦૦૦$$

$$\underline{૧૨૩૦૮૯}$$

$$(૧૪૦૦+૮૦)૮૦=૧૧૮૪૦૦=૨ \times ૧૦૦ \times ૮૦ + ૮૦^૨.$$

$$\underline{૪૯૮૯}$$

$$(૧૫૬૦+૩)૩=\underline{૪૬૮૯}=૨ \times ૩ \times (૭૦૦+૮૦)+૩^૨.$$

$$૦૦૦૦$$

ઉપર કહ્યા પ્રમાણે ઉપલી સંખ્યા ઉપર ચિન્હ મૂક્યાથી માલમ પડે છે કે તેના વર્ગમૂળમાં ત્રણ અંક આવશે એટલે પહેલો અંક સોનો આવશે. માટે એ આખી સંખ્યામાંથી પાંચમા નેછઠ્ઠા અંક ૬૧ માં સોનો કયો અંક સમાશે, તે જોઈએ. ૬૧ નું વર્ગમૂળ ૪૯ ના વર્ગમૂળ કરતાં વધારે, અને ૬૪ કરતાં ઓછું છે. માટે ૬૧૦૦૦૦ માં ૭૦૦ કરતાં વધારે ને ૮૦૦ કરતાં ઓછાનો વર્ગ સમાશે, માટે ૭૦૦ એ પહેલો અંક આવશે. તેથી ૭૦૦ નો વર્ગ બાદ કર્યાથી ૧૨૩૦૮૯ વધ્યા. એમાં કેટલા દશક સમાશે, તે જોળી કહાડવું છે. તે દશક ગમે તે હોય, પણ ૧૨૩૦૮૯ માં તે દશકનો વર્ગ અને ૭ સોના જમણાનો ને તે દશકનો ગુણાકાર સમાવો જોઈએ, એટલે $૨ \times ૭૦૦ \times$ તે દશક + તે દશકનો વર્ગ અથવા $(૨ \times ૭૦૦ + \text{દશક})$ દશક સમાવો જોઈએ. હવે કયો દશક છે, તે જાણવા માટે $૨ \times ૭૦૦ = ૧૪૦૦$ ને એક

દશકે ગુણ્યા તો ૧૪૦૦૦ થયા, તે ૧૨૩૦૮૯ માં ૮ વાર સમાશે એમ જણાયછે, ગાટે આઠ દશક આવશે, એમ સમજાયછે. તેથી ૧૪૦૦+૮૦ને ૮૦ એ ગુણી બાદ કર્યા તો ૪૬૮૯ બાકી રહેછે તે ઉપરથી ત્રીજો અંક એકમનો કઢાડવાનો છે. તે એકમ ગમે તે હોય, પણ તેનો વર્ગ અને પાંચગા બંને અંકોની બમણાઈનો, ને એકમનો ગુણાકાર ૪૬૮૯ માં સમાવે નોંધએ. એટલે $૨(૭૦૦+૮૦ \times ૮૦)$ એકમનો વર્ગ અથવા $૭૮૦ \times ૨ = ૧૫૬૦ +$ એકમ \times એકમ સમાવા નોંધએ. પણ ૪૬૮૯ ને ૧૫૬૦ ભાગી જોતાં ત્રણ આવે છે. માટે ત્રણ એકમ આવવા નોંધએ, તેથી $૨ \times ૭૮૦ \times ૩ + ૩^૨ = ૪૬૮૦$ આવી રાંકશે. માટે ૭ સો ૮ દશક ને ૩ એકમ $= ૭૮૩$ જવાબ.

ઉપર વર્ગમૂળ ગણી બતાવ્યું છે ત્યારબાદ વર્ગમૂળની રીત શી રીતે બિંબન થઈ તે નીચે મુજબ.

૧૪૧૩૭૬નું વર્ગમૂળ કઢાડવું હોયતો—

)૧૪૧૩૭૬ (૩૦૦+૭૦+૬=૩૭૬ જવાબ,

$$\begin{array}{rcl}
 ૩૦૦^૨ = & ૯૦૦૦૦ & \\
 & \underline{૫૧૩૭૬} & \\
 ૬૭૦ \times ૭૦ = & ૪૬૯૦૦ & = (૨ \times ૩૦૦ \times ૭૦) + ૭૦^૨ \\
 & \underline{૪૪૭૬} & \\
 ૭૪૬ \times ૬ = & ૪૪૭૬ & = ૨ \times (૩૦૦ + ૭૦) \times ૬ + ૬^૨ \\
 & \underline{૦૦૦૦} &
 \end{array}$$

આ ઉપરથી નીચેની રીત થઈ છે.

$$\begin{array}{rcl}
 ૩ &) ૧૪૧૩૭૬ (૩૭૬ & \\
 + ૩ & ૯ & \\
 \hline
 ૬૭ & ૫૧૩(૭ & \\
 + ૭ & ૪૬૯ & \\
 \hline
 ૭૪૬ & ૪૪૭૬(૬ & \\
 & ૪૪૭૬ & \\
 \hline
 & ૦૦૦૦ &
 \end{array}$$

છેત્રી રીત એ વર્ગમૂળ કહાડવાની રીત છે, તેનું કન-
રણ ઉપર લખેલી રીત ઉપરથી સમજશે.

જ્યારે વર્ગમૂળ કહાડતાં છેવટ ન આવે ને કોઈ સં-
ખ્યા વધેતો વર્ગમૂળમાં જેટલાં દશાંશ સ્થળ લાવવાં હોય
તેથી જમણાં તે સંખ્યા ઉપર દશાંશ સ્થળમાં મીડાં ચઢા-
વવાં. જેમકે ૭નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોયતો નીચે પ્રમાણે કરવું.

૨) ૭.૦૦૦૦૦૦ (૨.૬૪૫

૨ ૪

૪૬ ૩૦૦ (૬

૬ ૨૧૬

૫૨૪) ૨૪૦૦૧૪ આમાં દશાંશ સ્થળ ૩ લાગ્યાછીએ

૪ ૨૦૯૬ માટે ત્રણ સ્થળ કાપી દશાંશ ચિન્હ

૫૨૮૫) ૩૦૪૦૦ (૫ કર્યુએટલે ૨.૬૪૫ જવાબ.

૨૬૪૨૫

૩૯૭૫

કોઈ અપૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો અંશનું
વર્ગમૂળ અંશ સ્થળે અને છેદનું વર્ગમૂળ છેદ સ્થળે લખ-
વું એ જવાબ. જેમકે $\frac{૫}{૬}$ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો ૪
નું વર્ગમૂળ ૨ અંશ, અને ૯ નું વર્ગમૂળ ૩ છેદ, એટલે
 $\frac{૫}{૬}$ આવશે. $\frac{૫}{૬}$ નું વર્ગમૂળ લખવું હોય તો $\sqrt{\frac{૫}{૬}}$ અથવા $\frac{\sqrt{૫}}{\sqrt{૬}}$
લખાય. જેના અંશને છેદનું વર્ગમૂળ જતું ન હોય, તેના
અંશને અને છેદને છેદે અથવા અંશે ગુણીશું, તો પા-
છળ કહી ગયા, તે પ્રમાણે કીમતમાં ફેર પડશે નહીં. ને
જો છેદે ગુણીશું, તો છેદનું વર્ગમૂળ ને અંશે ગુણીશું તો
અંશનું વર્ગમૂળ જશે, એટલે અંશને છેદમાંથી એકજ મદ
માત્ર વર્ગમૂળમાં રહેશે. તેનું વર્ગમૂળ ઉપર કલા પ્રમાણે ક-
હાડવાથી નીકળશે. જેમકે $\frac{૫}{૬}$ નું વર્ગમૂળ કહાડવું હોય, તો

$૬ \times ૩ = ૧૮$ તેનું વર્ગમૂળ $\sqrt{૧૮}$ ન. અથવા $૬ \times ૩ = ૧૮$ નું વર્ગમૂળ $\sqrt{૧૮}$ આવશે. પછી ૨૧ નું વર્ગમૂળ કઢાડવાથી જવાબ નીકળશે.

દશાંશનું વર્ગમૂળ કઢાડવાની રીત ને ચિન્હ મૂકવાની રીતનું કારણ-દશાંશમાં જેટલાં સ્થળ હોય, તે પ્રમાણે તેને વ્યવહારીમાં મૂકી છેદ મૂકવા. પછી તેનું વર્ગમૂળ કઢાડવું.

$$\begin{aligned} \text{જેમકે } \sqrt{૪૦.૯૬} &= \frac{\sqrt{૪૦૯૬}}{\sqrt{૧૦૦}} = \frac{૬૪}{૧૦} = ૬.૪ \text{ અથવા } \sqrt{૪૦.૯૬} \\ &= \frac{\sqrt{૪૦૯૬}}{\sqrt{૧૦૦}} = \frac{૬૪}{૧૦} = ૬.૪ \text{ આ ઉપરથી માલમ પડે છે કે } ૬. \end{aligned}$$

શાંશમાં જે સ્થળ હશે, તેા તેનું વર્ગમૂળ એક અને ચાર સ્થળ હશે, તેા જે આંક આવશે માટે દશાંશનું વર્ગમૂળ કઢાડવું હોય, તેા પ્રથમ શતાંશ ઉપર, પછી દશ સહસ્ત્રાંશ ઉપર એમ બીજા બીજા આંક ઉપર ચિન્હ કરવું. જેટલાં ચિન્હ થશે, તેટલાં દશાંશ સ્થળ વર્ગમૂળમાં આવશે. દશાંશ સાચે પૂર્ણાંક હોય, તેા બંનેનું એક વર્ગમૂળ દશાંશ ન હોય, એ રીતે કઢાડી પછી જેટલાં દશાંશ સ્થળ ઉપર ચિન્હ હોય, તેટલા આંક જમણી તરફથી કાપીને દશાંશ ચિન્હ કરવું. જે દશાંશ આંકની સંખ્યા એકી હોય, તેા તે ઉપર જમણી તરફ એક શૂન્ય મૂકી એકી આંક કરવા, કેમકે દશાંશમાં જમણી તરફ શૂન્ય મૂક્યાથી કીમતમાં ફેર પડતો નથી એવું આપણે પાછળ સમજાવી ગયા છીએ.

ધનમૂળ.

કોઇ સંખ્યા કયી સંખ્યાનો ધન છે એ મૂળ સંખ્યાને તે સંખ્યાનું ધનમૂળ કહે છે. ૨૭ એ ત્રણનો ધન છે માટે ૩ એ ૨૭નું ધનમૂળ. કોઇ સંખ્યાનું ધનમૂળ જે આંક એટલે એકમ ને દશક હોયતો તે સંખ્યામાં દશકનો ધન

દશકના વર્ગના ત્રમણા ને એકમનો ગુણાકાર+એકમના વર્ગના ત્રમણા ને દશકનો ગુણાકાર+એકમનો ધન એટલું સમાવું જોઈએ. જેમકે ૧૭૫૬૧૬ એ ૫૬ નો ધન છે માટે એમાં $૫૦^૩+૫૦^૨ \times ૩ \times ૬+૫૦ \times ૩ \times ૬^૨+૬^૩$ એટલું સમાવ છે.

ધનમુળમાં ચિન્હ મુકવાની રીતનું કારણ—
 ૧૦નો ધન ૧૦૦૦ છે માટે જેટલા દશકનો ધન કરીશું તે, તે દશકના અંકના ધનને ૧૦૦૦ ગુણ્યા જેટલો થશે. જેમકે $૪૦^૩ = ૪^૩ \times ૧૦^૩$ અથવા $૪^૩ \times ૧૦૦૦ = ૬૪૦૦૦$ નું ધનમૂળ કઢાડવું હોયતો છેલ્લા ત્રણ અંક કાપતાં જેટલા હજાર વધે તેનું ધનમૂળ કઢાડી તેને દશે ગુણ્યા એટલે ચાલશે. તેથી ૬૪નું ધનમૂળ ચાર એ દશક આવ્યા માટે $૪ \times ૧૦ = ૪૦$ એ ૬૪૦૦૦નું ધનમૂળ. છેલ્લા ત્રણ અંકનું ધનમૂળ એકમ આવશે, ને તે પેહેલાંના ત્રણ અંકનું ધનમૂળ દશક આવશે. તેજ પ્રમાણે ૧૦૦નો ધન ૧૦૦૦૦૦૦ છે માટે જેટલા શતકનો ધન કરીશું તે, તે શતકના અંકના ધનને દશ લાખે ગુણ્યા જેટલા આવશે. તેથી છેલ્લા છ અંક કઢાડતાં જેટલા દશ લાખ રહે તેનું ધનમૂળ કઢાડી તેને સોએ ગુણવાથી તે સંખ્યાનું ધનમૂળ આવશે. ૫ શતકનો ધન ૧૨૫૦૦૦૦૦૦ આવશે તેનું ધનમૂળ કઢાડવું હોયતો છેલ્લા છ અંક કઢાડી ૧૨૫નું ધનમૂળ કઢાડવું તો પાંચ આવ્યું તેને ૧૦૦એ ગુણ્યા એટલે ૫૦૦ જવાળ.

માટે કેટલાક દશલાખ, કેટલાક હજાર અને શતક, દશક ને એકમ હોય એવી સંખ્યાનું ધનમૂળ કઢાડવું હોયતો છેલ્લા છ અંક જૂદા રાખતાં જેટલા દશલાખ હોય તેનું ધનમૂળ કઢાડવું, પછી જેટલા હજાર હોય તેનું ને પછી છેલ્લા ત્રણ અંકનું કઢાડવું એટલે પ્રથમ અંક શતકનો પછી દશકનો ને છેલ્લો એકમનો આવશે. પણ એ પ્રમાણે અંકો જૂદા રાખવાને બદલે તેમના ઉપર ટપકાની નિશાની વર્ગ-

મૂળમાં કરીએ છીએ તેવી કર્યાથી પણ ચાલશે એટલે ૧૭૫૬૧૬ આનું ધનમૂળ કહાડવું હોયતો છેલ્લા ત્રણ અંકનું ધનમૂળ એકમને ૧૭૫ હજારનું ધનમૂળ દશક આવશે માટે ૧૭૫૬૧૬ આ પ્રમાણે ટપકાં કર્યાથી પણ ચાલશે. ૧૭૫૬૧૬ ના ધનમૂળમાં બે અંક આવશે. પેહેલો દશકને બીજો એકમનો. ધનમૂળ કહાડવાની સંખ્યા ઉપર ત્રણ ત્રણ અંકે ટપકાં શાથી કરે છે તે ઉપરની રીતથી સમજશે. દશાંશ અપૂર્ણાંકમાં. ૧નો ધન. ૦૦૧ છે માટે. ૦૦૧નું ધનમૂળ. ૦૧ આવે એટલે ૦૦૧ ના ગમે તેટલા ધન ગણ્યા કરીશું તેનું ધનમૂળ તેટલા દશાંશ આવશે. ૪નો ધન. ૦૦૪નું ધનમૂળ. ૪ આવશે. એટલે દશાંશના પેહેલા ત્રણ અંકનું ધનમૂળ દશાંશ, તે પછીના ત્રણ અંકનું ધનમૂળ શતાંશર્ધ આવશે. માટે જે સંખ્યાનું ધનમૂળ કહાડવું હોય તેના દશાંશમાં પણ ડાબા હાથ ભણીથી ત્રણ અંકગણી તે ઉપર ટપકાં કરવાં. જેટલાં ટપકાં થશે તેટલા અંક ધનમૂળના દશાંશમાં આવશે. જો ત્રણ અંક પૂરા ન થતા હોયતો ખૂટતાં મીડાં ચઢાવવાં. કેમકે દશાંશમાં જમણા હાથ ભણી મીડાં ચડાવ્યાથી કીમતમાં કાંઈ ફેર પડતો નથી, જેમકે ૪ નું ધનમૂળ કહાડવું હોયતો ૪૦૦નું કહાડવું. કેમકે ૪નીને ૪૦૦ ની કીમત સરખીજ છે.

ધનમૂળની રીતનું કારણ—નીચે ગણેલા દાખલાથી સમજશે. ૧૭૫૬૧૬નું ધનમૂળ કહાડવું હોયતો ૧૭૫૬૧૬ ટપકાં મૂક્યાથી જણાય છે કે ધનમૂળમાં બે અંક આવશે. એકમ તે દશક. માટે એ સંખ્યામાં દશક^૩ + ૩×દશક^૨ × એકમ + ૩×દશક × એકમ^૨ + એકમ^૩ સમાવા જોઈએ. તેથી

$$) ૧૭૫૬૧૬ (૫૦ + ૬ = ૫૬$$

$$૫૦^૩ = ૧૨૫૦૦૦$$

$$૩×૫૦^૨ = ૭૫૦૦) ૫૦૬૧૬ (૬$$

$$(૩×૫૦^૨ + ૩×૫૦×૬ + ૬^૩) × ૬ = \frac{૫૦૬૧૬ = ૩×૫૦^૨ × ૬ + ૩×}{૦૦૦૦૦} \frac{૫૦×૬^૨ + ૬^૩}{}$$

(૮૧)

$$\text{અથવા } 3 \times 40^2 = 4800$$

$$+ 3 \times 40 \times 1 = 1200$$

$$+ 1^2 = 1$$

$$\hline 640001 = 40001$$

ઉપલા દિસાબમાં પ્રથમ ૧૭૫૦૦૦નું ધનમૂળ કહાડવાનું છે તેનું ધનમૂળ ૫ આવે છે તે દશક આબ્યા તેથી એ આખી સંખ્યામાંથી ૫૦૦બાદ કર્યોતો ૫૦૬૧૬ બાકીરહે છે તેમાં ૫૦૨×૩૩એકમ+૩×૫૦×એકમ^૨+એકમ^૩સમાવા જોઈએ. હવે એકમ કર્યો આવશે તે જાણવા માટે ૫૦૬૧૬ ને ૫૦૨×૩ વડેલાગ્યાતો ૬ આવે છે તેથી ૬ એકમ આવશે એમ જાણાય છે, માટે ૫૦૬૧૬માંથી ૩×૫૦^૨×૬+૩×૫૦×૬^૨+૬^૩અથવા (૩×૫૦^૨+૩×૫૦×૬+૬^૨)×૬ બાદ કરવા જોઈએ પણ (૩×૫૦^૨+૩×૫૦×૬+૬^૨)×૬=૫૦૬૧૬ છે માટે ૧૭૫૬૧૬નું ધનમૂળ ૫૦+૬=૫૬આબ્યા એ જવાબ. તેજપર નજી આંક ધનમૂળમાં આને એવી સંખ્યાલીધી. જેમકે ૩૩૬૯૮૨૧૭નું ધનમૂળ કહાડવું હોયતો ચિન્હ મૂક્યાથી માલમ પડે છે કે એ સંખ્યાનું ધનમૂળ ત્રણઆંક આવશે એ-ટલે પ્રથમ આંક સોનો બીજો દશકનો ને ત્રીજો એકમનોઆવશે.

| | | |
|----------------------------|----------|---|
| ૩૦૦ ^૩ = | ૩૩૬૯૮૨૧૭ | ૩૦૦ |
| | ૨૭૦૦૦૦૦૦ | |
| | ૬૬૯૮૨૧૭ | ૨૦ |
| ૩×૩૦૦ ^૨ =૨૭૦૦૦ | | |
| ૩×૩૦૦×૨૦=૧૮૦૦૦ | | |
| ૨૦ ^૨ =૪૦૦ | | |
| ૨૮૮૪૦૦ | | |
| ×૨૦= | ૫૭૬૮૦૦૦ | =૩×૩૦૦ ^૨ ×૨૦+૩×૩૦૦ |
| ૩×૩૨૦ ^૨ =૩૦૭૨૦૦ | ૬૩૦૨૧૭ | (×૨૦ ^૨ +૨૦૩ અથવા ૩ |
| ૨×૩૨૦×૩= ૨૮૮૦ | | ×૩૦૦ ^૨ +૩×૩૦૦×૨૦ |
| ૩ ^૨ = ૯ | | +૨૦ ^૨)×૨૦ |
| ૩૧૦૦૮૯ | | |
| ×૩= | ૯૩૦૨૧૭ | =૩×૩૨૦ ^૨ ×૩+૩×૩૨૦ ^૩ |
| | | |
| | ૦૦૦૦૦૦ | ×૩ ^૨ +૩ ^૩ અથવા(૩×૩૨૦ ^૨ |
| | | +૩×૩૨૦×૩+૩ ^૩)×૩ |

ઉપલા હિસાબમાં પ્રથમ ૩૩૦૦૦૦૦૦નું ધનમૂળ ક-
હાડવાનું છે તે ૩૦૦ આલ્યું માટે ૩૦૦નો ધન ૨૭૦૦૦૦૦૦
બાદ કર્યોતો ૬૬૯૮૨૬૭ બાકી કહ્યા તેમાં $૩\times ૩૦૦^2 \times ૬૬૯૮$
 $+ ૩\times ૩૦૦ \times ૬૬૯૮^2 + ૬૬૯૮^3$ સમાવા જોઈએ. તેથી કયોદશક
સમાશે તેજાણવા સારૂ પ્રથમ ૩×૩૦૦^2 વડે ભાગ્યા તો ૨
દશક અથવા ૨૦ આવે છે માટે બીજો અંક ૨૦ આવશે
તેથી ૬૬૯૮૨૬૭માંથી $૩\times ૩૦૦^2 \times ૨૦ + ૩\times ૩૦૦ \times ૨૦^2 +$
 ૨૦^3 અથવા $(૩\times ૩૦૦^2 + ૩\times ૩૦૦ \times ૨૦ + ૨૦^2) \times ૨૦$ બાદ
કર્યોતો ૯૩૦૨૬૭ બાકી રહેલા છે પણ તેમાં ૩×૩૨૦^2
 \times એકમ $+ ૩\times ૩૨૦ \times$ એકમ $+ ૩$ એકમ સમાવા જોઈએ માટે
૯૩૦૨૬૭ને ૩×૩૨૦^2 વડે ભાગ્યા તો ૩ એકમ આવ્યા માટે
ત્રીજો અંક અથવા એકમ ૩ આવશે તેથી ૯૩૦૨૬૭માંથી
 $૩\times ૩૨૦^2 \times ૩ + ૩\times ૩૨૦ \times ૩^2 + ૩^3$ અથવા $(૩\times ૩૨૦^2 + ૩\times$
 $૩૨૦ \times ૩ + ૩^2) \times ૩ = ૯૩૦૨૬૭$ બાદ કીધા તો કાંઈ ન વધ્યું
માટે ૩૩૬૯૮૨૬૭નું ધનમૂળ $૩૦૦ + ૨૦ + ૩ = ૩૨૩$ આવ્યો.
ઉપલા હિસાબને બીજી ઢુંકી રીતે ગણાએ તો નીચે પ્રમાણે ગણાશે.

| | | |
|------------------------------|--------------|--------------------------|
| | ૩૩૬૯૮૨૬૭ ૩૨૩ | |
| $૩^3 = ૨૭$ | ૬૬૯૮ | પ્રથમ ભાગક ૩ |
| $૩\times ૩૦^2 = ૨૭૦૦$ | | એ ૩૦૦ છે પણ |
| $૩\times ૩૦ \times ૨ = ૧૮૦$ | | બીજો ભાગક કહા- |
| $૨^2 = ૪$ | | ડવો છે તેથી ૩૦૦ |
| $૨૮૮૪ \times ૨ =$ | ૫૭૬૮ | નાદશક ૩૦ માટે ૩૦ |
| $૩\times ૩૨^2 = ૩૦૭૨૦૦$ | ૯૩૦૨૬૭ | લીધા છે એ ૩×૩૦^2 |
| $૩\times ૩૨ \times ૩ = ૨૮૮૦$ | | $= ૨૭૦૦$ એ પ્રથમ |
| $૩^2 = ૯$ | | અજભાયશ ભાગક |
| $૩૧૦૦૮૬ \times ૩ =$ | ૯૩૦૨૬૭ | આવ્યો છે |
| | ૦૦૦૦૦૦ | |

હવે ત્રીજો ભાગક એકમ કહાડવો છે તેથી ૩૨ દશકના એકમ
૩૨૦ લીધા છે એ $૩\times ૩૨૦^2 = ૩૦૭૨૦૦$ એ બીજો અજભાયશ
ભાગક આવ્યો છે.

પણી ઉપરના હિસાબને કુઠામાં નીચે પ્રમાણે ગણાશે
એ રીત પણ ઉપરની રીત ઉપરથીજ કરેલી છે.

| | | |
|---------------------------------------|------------|----------------------------------|
| પેહેલોઅજમાયશબાજક | ૩૩૬૯૮૨૬૭૩૩ | $3 \times 32^2 = 3072$ |
| ૩૫૩૦૨ = ૨૭૦૦ | ૨૭ | હવે $32^2 = 30^2 +$ |
| $3 \times 30 \times 2 + 2^2 = 128$ | ૬૬૯૮ | $2(30 \times 2) + 2^2$ છે તેને |
| $2૮૮૪ \times 2 = ૫૭૬૮$ | | ત્રણે ગુણવામાટે $3 \times$ |
| બીજોઅજમાયશ | ૪ | $30^2 + 3 \times 3(30 \times 2)$ |
| બાજક $3 \times 320^2 = 307200$ | ૬૩૦૨૬૭ | $+ 3 \times 2^2$ થવાજોઈએ |
| $(3 \times 320 \times 3) + 32 = 2૮૮૯$ | | તે $128 + 2૮૮૪ + ૪$ |
| $3100૯૯ \times 3 = ૯૩૦૨૬૭$ | | થી થઈ રહે છે માટે |
| ૦૦૦૦૦૦ | | ત્રણનો સરવાળો કરી |
| | | બે મીડાં ચઢાવી $3 \times$ |
| | | 320^2 ઉત્પન્ન કર્યા હવે |

૨૮૮૪માં ૩૪૩૦^૨ + ૩૪૩૦^૪ એકવાર છે, અને એકવાર બેનો વર્ગ
છે તે ૧૮૪માં પણ એકવાર ૩૪૩૦^૪ બેનો વર્ગ છે. માટે એવાર
૩૪૩૦^૪ આવ્યા અને એવાર બેનો વર્ગ આવ્યો પણ બે-
નો વર્ગ ત્રણવાર જોઈએ તેથી ત્રીજીવાર ઉપલી ૧૮૪+
૨૮૮૪ની રકમમાં બેનો વર્ગ ઉમેર્યો એટલે ૨૪૩૨^૨ થઈ ગયો
પણ ૩૪૩૨૦^૨ જોઈએ છીએ માટે ૩૪૩૨^૨ = ૩૦૭૨ ઉપર
બેમીઠાં મૂક્યાથી ૩૦૭૨૦૦ આવ્યા છે. આગળ ભાગ ક-
હાડવો હોયતો અજમાયશ લાજક કહાડવાને એજ પ્રમાણે
કર્યાથી આવશે એટલે વર્ગ કરી ત્રણે ગુણવાની કડાકટ પડશે નહિ.

ઉપરની રીત ઉપરથી વળી બીજી ટુંકી રીત ચાલે છે.

૩૩૬૯૮૨૬૭(૩૨૩)

૨૭અનુભાયશ બાજક $૩ \times ૩^2 = ૨૭$)

૬૬૯૮

 $૩ \times ૩ \times ૨ = ૧૮$ $૨^2 = ૪$ $૨૮૮ \times ૨ = ૫૭૬૮$

૪

૯૩૦૨૬૭અનુભાયશ બાજક $૩ \times ૩^2 = ૩૦૭૨$ $૩ \times ૩^2 \times ૩ = ૨૮૮$ $૩^2 = ૯$ $૩૧૦૦૮૯ \times ૩ = ૯૩૦૨૬૭$

૦૦૦૦૦

આ રીતમાં માત્ર બાજકમાં મીડાં આવતાં તે કહાડી ના ખ્યાં છે ને તેને બદલે અંકકાપીને ચૂક્યા છે.

ઉપરની રીત ઉપરથીજ હાનર સાહેબની રીત નીચે પ્રમાણે નીકળી છે એ રીતમાં ત્રણ ને નવા બાગાકારના વર્ગો ગુણી અનુભાયશ બાજક કહાડવાનો છે તેને બદલે એ ખાનાં પાડે છે એટલે પેહેલા ખાના ઉપરથી અનુભાયશ બાજકમાં ખરા બાજક લાવવાની રકમ કહાડી શકાય છે ને ઉપરની રીતમાં અનુભાયશ બાજકમાં સરવાળો કરવો પડે છે તેને બદલે એ રીતથી અનુભાયશમાં માત્ર એકજ રકમ ઉમેરવાની નીકળે છે તેમજ પેહેલા ખરા બાજકની સાથે બીજી ત્રણ રકમ ઉમેરવાથી નવો અનુભાયશ બાજક નીકળે છે. તેને બદલે આ રીતથી એકજ રકમ ઉમેરવી પડે છે એ ઉમેરવાની રકમ ઉપરની રીતમાં આપેલી રકમોના સરવાળા ખરાબ થઈ રહે છે તે નીચેની રીતથી સમજાશે એટલે આ હાનર સાહેબની રીત સહેલી ને યાદ રહે એવી છે ને તેમાં ભૂલ થવાનો સંભવ થોડો રહે છે જોગકે

$$\begin{array}{r}
 3 \times 30 = 60 \quad 30 = 2000 \\
 \hline
 2 \\
 62 \times 2 = 124 \\
 \hline
 4 \\
 640 \\
 \hline
 3 \\
 643 \times 3 = 1929 \\
 \hline
 300200
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 33662210022 \\
 \hline
 20 \\
 \hline
 6666
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 124 \\
 2224 \\
 4 \\
 \hline
 300200
 \end{array}
 \times 2 = 400400$$

$$\begin{array}{r}
 6666 \\
 300200 \\
 \hline
 310066 \times 3 = 930198
 \end{array}$$

પ્રથમ 3×3^2 મૂકતા તેને બદલે બીજો અંક દશક આપવાનો તે ઉમેરવો છે માટે $3 \times 30 = 60$ ને $60 \times 30 = 2000$ મૂક્યા છે. તેમાં $60 + 2 = 62$ ને $62 \times 2 = 124$ ઉમેર્યાથી 2224 બન્યા બાજક આવ્યો. તે બિપર પણ આવેલો છે. હવે પ્રથમ આપણે $3 \times 30 \times 2 + 2^2 = 124$ ઉપભવ્યા હતા ને $3 \times 30 \times 2 + 2^2 = (3 \times 30 + 2) \times 2$ છે તેથી એ રીત ઉત્પન્ન કરી છે. વળી હરમાં બે વાર બે ઉમેર્યાથી ૯૬ થયા તે દશક છે તેમાં એકમ ઉમેરવાનો માટે લેના એકમ કરવાને મીકું ચઢાવ્યું ને 3002 એ 3×32^2 છે પણ તે 3×320^2 ઉપરની રીતે આવેલો છે એ માટે 3002 ઉપર બે મીડાં ચઢાવી 300200 કર્યા છે.

પ્રથમની રીતમાં બીજા અજમાયશ બાજક 300200 માં $3 \times 320 \times 3 + 3^2$ ઉમેરતા એટલે 2224 ઉમેરતા તે 663×3 ની બરાબર છે કેમકે $3 \times 320 \times 3 + 3^2 = (3 \times 320 + 3) \times 3$ છે તેથી 2224 બિપરની રીતે ઉત્પન્ન કરી ઉમેર્યો છે.

વળી એ રીત ઉપરથી નીચેની બીજી રીત નીકળી છે, આ રીત કોઈ પણ ધાતમૂળ કહાડવામાં કામ આવે છે. જેટલા ધાતમૂળ કહાડવું હોય તેના કરતાં એક એમણું એટલા ખાનાં બાજકમાં પાડવાં. પછી પેહેલા ખાનામાં પેહેલો બાજકાર, બીજામાં તેનો વર્ગ, ત્રીજામાં તેનો ઘન, એ પ્ર-

માણે મૂકવો. પછી પેહેલા ખાનામાં તેજ ભાગાકાર ઉમેરવો. તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં, ને તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં એમ ઉમેરવા. વળી પેહેલા ખાનામાં પેહેલો ભાગ ઉમેરવો, તેને ભાગાકારે ગુણી બીજામાં, ને તેને ભાગાકારે ગુણી ત્રીજામાં ઉમેરવા. મતલબ કે એવી ઉમેરવાની રકમ છેલ્લા ખાનામાં એકવાર, તેની પાસેના ડાયા હાથનાં ખાનામાં બેવાર, તેની પાસેના ખાનામાં ત્રણવાર, એ પ્રમાણે ઉમેરવી; એટલે ધનમૂળ કાઢવું હોય તો બે ખાનાં હોય માટે ડાયાહાથના પેહેલા ખાનામાં બે વાર ને બીજામાં એકવાર ઉમેરવી. ચતુર્થાંત મૂળ હોય તો પેહેલામાં ત્રણવાર, બીજામાં બેવાર ને ત્રીજામાં એકવાર એમ ઉમેરવી. પછી પેહેલા ખાનાની સંખ્યા ઉપર એક, બીજા ખાનાની સંખ્યા ઉપર બે, ને ત્રીજા ખાનાની સંખ્યા ઉપર ત્રણ મીડાં મૂકવાં. એ છેલ્લા ખાનાની સંખ્યા અજમાયશ ભાજક થશે. તે ઉપર નવો ભાગ કઢાડવો. ને નવો ભાગ વળી પેહેલા ખાનામાં ઉમેરી, તેને નવા ભાગે ગુણી બીજા ખાનામાં ઉમેરવો ને તેને નવા ભાગે ગુણી ભાજકમાંથી બાદ કરવો. બાકી ઉપર બીજા ત્રણ અંક ઉમેરવા. પછી વળી ઉપરની રીતે ત્રણ ખાનાં હોય તો પેહેલા ખાનામાં નવો ભાગ ત્રણવાર, બીજામાં બે વાર ને ત્રીજામાં એકવાર ઉમેરી, ઉપર પ્રમાણે મીડાં ચઢાવવાં, એટલે છેલ્લા ખાનાની સંખ્યા અજમાયશ ભાજક થશે. તે ઉપરથી નવો ભાગ કઢાડવો. પછી છેલ્લા ખાનામાં નવો ભાગ ઉમેરી, તેને નવા ભાગે ગુણી બીજામાં, ને તેને નવા ભાગે ગુણી ત્રીજામાં ઉમેરવાથી સરવાળો ખરો ભાજક થશે. તેને નવા ભાજકે ગુણી ભાજકમાંથી બાદ કરવા. એ રીતે જેટલા અંક આવવાના હોય ત્યાં સુધી કરવું. આ રીત, નીચે દાખલો કરી જતાવ્યો છે, તેથી સમજાશે. તેનું કારણ હાર્નર સાહેબની રીત, સાથે સરખાવ્યાથી સ્પષ્ટ થઈ શકે. નીચે ધનમૂળ છે માટે ભાજકમાં બે ખાનાં પાડ્યાં છે.

(૮૭)

| | | |
|---------|------------|----------------|
| ૩ | ૯ | ૧૩૬૯૮૨૧૭ ૩૨૩ |
| ૩ | | ૨૭ |
| ૬x૩ = | ૧૮ | ૬૬૯૮ |
| ૩ | ૨૭૦૦ | |
| ૯૦ | | |
| ૨ | | |
| ૯૨x૨ = | ૧૮૪ | ૫૭૬૮ |
| ૨ | ૨૮૮x૨ = | ૫૭૬૮ |
| ૯૪x૨ = | ૧૮૮ | ૬૩૦૨૬૭ |
| ૨ | ૩૦૭૨૦૦ | |
| ૬૬૦ | | |
| ૬૬૩x૩ = | ૨૮૮૯ | ૬૩૦૨૬૭ |
| | ૩૧૦૦૮૬x૩ = | ૦૦૦૦૦૦ |

ઉપરની રીતે અતુષીતમૂળનો દાખલો ૩ ખાનાં પાડી નીચે પ્રમાણે છે,

| | | | |
|-------------------------|------------------|-----------|-------------------|
| ૩ | ૯ | ૨૭ | ૧૦૮૮૪૫૪૦૨૪૧ ૩૨૩ |
| ૩ | | | ૮૧ |
| ૬x૩ = ૧૮ | | | |
| ૩ | ૨૭ x ૩ = ૮૧ | | |
| ૯x૩ = ૨૭ | ૧૦૮૦૦૦ | ૨૭૮૪૫૪ | |
| ૩ | ૫૪૦૦ | | |
| ૬૨૦ | | | |
| ૨ | | | |
| ૧૨૨x૨ = ૨૪૪ | | | |
| ૨ | ૫૬૪x૨ = ૧૧૨૮૮ | | |
| ૧૨૪x૨ = ૨૪૮ | ૧૧૬૨૮x૨ = ૨૩૮૫૭૬ | | |
| ૨ | ૫૮૬૨x૨ = ૧૧૭૮૪ | | |
| ૧૨૬x૨ = ૨૫૨ | ૧૩૧૦૭૨૦૦૦ | ૩૬૮૭૮૦૨૪૧ | |
| ૨ | ૬૧૪૪૦૦ | | |
| ૧૨૮૦ | | | |
| ૩ | | | |
| ૧૨૮૩x૩ = ૩૮૪૯ | | | |
| ૬૧૮૪૬x૩ = ૧૮૫૪૭૪૭ | | | |
| ૧૩૨૬૨૧૭૪૭x૩ = ૩૯૮૭૮૦૨૪૧ | | | |
| | | ૦૦૦૦૦૦૦૦ | |

પણ આ રીત લાંબી હોવાથી અહુધાતમૂળમાં આ રીત કામે નહિ લગાડતાં જ્યાં જરૂર પડે ત્યાંજ માત્ર કામે લગાડવી. કેમકે ચતુર્ધાત મૂળ કહાડવું હોય તો વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે ચતુર્ધાત મૂળ નીકળશે. કેમકે ધાતમાં પાછળ આવી ગયું કે વર્ગનો વર્ગ કરવાથી ચતુર્ધાત થાય છે. માટે વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ કહાડવાથી ચતુર્ધાત મૂળ આવે. તેમજ ધનનો વર્ગ છ ધાત થાયછે માટે ધનમૂળનું વર્ગમૂળ એ છ ધાતમૂળ થાય. વળી વર્ગના વર્ગનો વર્ગ કરવાથી અષ્ટધાત થાયછે. માટે વર્ગમૂળના વર્ગમૂળનું વર્ગમૂળ એટલે ત્રણ વાર વર્ગમૂળ કહાડવાથી અષ્ટધાતમૂળ આવેછે. ધનનો ધન કરવાથી એટલે ધનનો વર્ગ કરી તેને ધનની રકમે ગુણવાથી નવ ધાત થાયછે માટે ધનમૂળનું ધનમૂળ કહાડવાથી નવ ધાતમૂળ આવે. આ પ્રમાણે કરવાથી ઉપરની લાંબી રીતે ગણવા પડતા નથી. પણ જ્યાં એ રીત કામે લાગતી નથી, ત્યાં ઉપરની રીતે ખાનાં પાડી કરવાની જરૂર પડેછે. કોઇ રકમનું પંચ ધાતમૂળ, સપ્ત ધાતમૂળ છતાંદી ધાતમૂળ ઉપરની વર્ગમૂળ ધનમૂળની રીતે નીકળશે નહિ, કેમકે વર્ગનો કે ધનનો કોઈ ધાત કરવાથી પંચધાત કે સપ્તધાત થતો નથી. માટે એવાં ધાતમૂળ કહાડવાં હોય ત્યારે ઉપલી ખાનાં પાડીને કરવાની રીતે ધાતમૂળ કહાડવું.

ક્ષેત્રફળ.

સપાટી ઉપર જે આકૃતિઓ થાય તેનું માપ કહાડવાની રીતને ક્ષેત્રફળ કહે છે. એ આકૃતિઓ ગોળ, ચોખ્ખુ, બહુખુણુ, ત્રિકોણુ છતાંદિ આકારની હોય છે. એ જુદી જુદી આકૃતિઓની વ્યાખ્યા બાણુનારે માદરાખવીજોઇએ.

કાટખુણુ ચોખ્ખુનું ક્ષેત્રફળ કાટખુણું કરનારી બેખાનુના એટલે લંબાઈ ને પહોળાઈના ગુણાકારની બરાબર છે.

કારણ—એક કાગળ એક ફૂટ લાંબો અને એક ફૂટ

પહોળો હોય તેને એક ચોરસ કુટ કહે છે. હવે એક કાગળ ત્રણ કુટ લાખો હોય ને એક કુટ પહોળો હોય તો તેનાએક એક ચોરસ કુટ જેવડા ત્રણ કડકા થાય છે. પણ જો તે કાગળ બે કુટ પહોળો હોય તો $૩ \times ૨ = ૬$ કડકા થાય એટલે ૬ ચોરસ કુટ થાય. ને લંબાઈને પહોળાઈનો ગુણાકાર ૬ ચોરસ થાય છે, તેથી ઉપરની રીત નીકળી છે.

ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તેની એક બાજુના વર્ગની બરાબર છે, કારણ કે ચોરસની લંબાઈને પહોળાઈ સરખી હોય છે. એટલે લંબાઈને પહોળાઈનો ગુણાકાર ને એક બાજુનો વર્ગ કરવો એ બંને સરખું જ છે.

સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનું ક્ષેત્રફળ પાયા અને પાયા ઉપર સામેના ખુણાથી લંબ દોરીએ તે બેના ગુણાકાર બરાબર છે.

કારણ—સમાંતર બાજુ ચોખ્ખામાં પાયા ઉપર સામેના બંને ખુણાથી લંબ દોરીશું તો તે બંને લંબથી એક કાટખુણ ચોખ્ખુ થશે. એ કાટખુણ ચોખ્ખાનું ક્ષેત્રફળ પ્રથમ કહેલા સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાની બરાબર છે. ને બંને ચોખ્ખાના પાયા સરખા છે, માટે સમાંતર બાજુ ચોખ્ખાનું ક્ષેત્રફળ પાયાનો ને પાયા ઉપર તેની સામેના ખુણાથી દોરેલા લંબના ગુણાકારની બરાબર છે.

કોઈ પણ ચોખ્ખા કે બહુખુણ આકૃતિનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો તેના ત્રિકોણ કરી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રીતે ક્ષેત્રફળ કહાડી સરવાળો કરવો કેમકે તે ત્રિકોણો મળવાથી તે આપેલી આકૃતિ થએલી છે.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાની સામેની બે બાજુ આપી હોય તો ત્રીજી બાજુ નીકળે છે. કેમકે કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાની સામેની બાજુનો વર્ગ તે, કાટખુણો ક-

ત્રિભૂમિતિના પ્રથમ ભાગની ૩૫મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

રનારી બંને બાજુના વર્ગોના સરવાળા બરાબર છે. [†]એટલે કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કાટખુણો કરનારી બાજુમાંની એક ત્રણ ફુટ ને બીજી ૪ ફુટ હોય તો $૩^૨+૪^૨=૫^૨$ એ કાટખુણા સામેની બાજુનો વર્ગ થાય. માટે ૫^૨નું વર્ગમૂળ ૫ ફુટ કર્ણ અથવા કાટખુણાની સામેની બાજુ થઈ, હવે જો એ ત્રણ બાજુમાંની ૩ ને ૫ ફુટ વાળી બે બાજુ આપી હોય તો $૫^૨-૩^૨=૪^૨$ એ બાકીની બાજુનો વર્ગ, માટે તેનું વર્ગમૂળ ૪ ફુટની એ બાજુ થઈ. તેમજ ૫ ને ૪ ફુટની બે બાજુ આપી હોય તો $૫^૨-૪^૨=૩^૨$ એ બાકીની બાજુનો વર્ગ માટે તેનું વર્ગમૂળ ૩ ફુટની એ બાજુ થઈ.

કોઈ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું હોય તો પાયાનો ને તેનો સામેના ખુણાથી પાયા ઉપર દોરેલા લંબનો ગુણાકાર કરી તેને બેએ ભાગવા. કારણ—એક પાયા ઉપરને એક જ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના સમાંતર બાજુ ચોખુણાથી ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અર્ધ છે, † ને કાટખુણુ ચોખુણુનું ક્ષેત્રફળ પાંચો ને લંબના ગુણાકારની બરાબર છે, માટે તેના અર્ધ બરાબર ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ થાય.

ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની ૨જ રીત—ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ ૧૧ સરવાળો કરી તેનું અર્ધ કરવું. એ અર્ધ-ગાંધી ત્રણે બાજુઓ જુદી જુદી બાદ કરવી. એ ત્રણ બાકીઓ અને અર્ધનો ગુણાકાર કરી તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું.*

કાટખુણુ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને પાંચો આપ્યો હોય તો કર્ણના વર્ગમાંથી પાયાનો વર્ગ બાદ કર્યાથી લંબનો વર્ગની-કળશે. તેનું વર્ગમૂળ કર્યાથી લંબ આવશે. પછી લંબને પા-

†જૂમીતિના પ્રથમ ભાગની ૪૭મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

‡જૂમીતિના પ્રથમ ભાગની ૪૧મી પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે.

જૂમીતિની પાછલી બકોને આધારે સિદ્ધ થશે.

યાના ગુણાકારનું અર્ધ કરવું. આનું કારણ ઉપર આવીગયું છે. તેજ પ્રમાણે કર્યું ને લ'ળ આપે તો કર્યુંનો વર્ગ-લ'ળનો વર્ગ=પાયાનો વર્ગ આવે. તેનું વર્ગમૂળ પાચો આવશે. પછી ઉપરની રીતે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કહાડવું. જે ક્ષેત્રફળ અને પાયા ઉપરથી કર્યું કે લ'ળ કહાડવો હોયતો $\frac{\text{પાચો} \times \text{લ'ળ}}{૨} =$

ક્ષેત્રફળ. માટે લ'ળ = $\frac{\text{ક્ષેત્રફળ}}{\text{પાચો}} \times ૨$ પછી લ'ળનો ને પાયાનો ૫-

જે કરો સરવાળો લેઈ તેનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે કર્યું આવશે. કોઈ પણ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને લ'ળ આપ્યો હોય ને પાચો કહાડવો હોય તો:—

$$\frac{\text{લ'ળ} \times \text{પાચો}}{૨} = \text{ક્ષેત્રફળ. માટે પાચો} = \frac{\text{ક્ષેત્રફળ} \times ૨}{\text{લ'ળ}}$$

ગોળનું ક્ષેત્રફળ.

ગોળના વ્યાસ ને પરીધનું ગુણોત્તર ૭ : ૨૨ એ પ્રમાણમાં છે. એટલે વ્યાસ ૭ કુટ હોયતો પરીધ ૨૨ કુટ હોય. પણ એ પ્રમાણથી વધારે લગભગ પ્રમાણ ૧૧૩=૩૫૫અથવા ૧:૩.૧૪૧૬ અથવા ૧:૩.૧૪૧૫૯૨૬૫૩૫૮૯.† છેલ્લું પ્રમાણ ખરાની લગભગ છે, પણ તે લાંબું હોવાથી હિસાબ ગણતારમાં પહેલાં ત્રણ પ્રમાણ લેવાય છે. તેમાં પણ વિશેષે ત્રીજું પ્રમાણ લેવાય છે.

કોઈ ગોળનું ક્ષેત્રફળ તેના પરીધના ચોથા ભાગનેટલી લંબાઈના ને વ્યાસ નેટલી પહોળાઈના કાટખુણચોખુણના ક્ષેત્રફળ બરાબર છે* માટે ગોળનું ક્ષેત્રફળ કહાડ્યું હોય તો પરીધ ને વ્યાસના ગુણાકારને ચારે ભાગવા. અ-

†આ પ્રમાણોની સત્યતા ત્રિકોણમીતિની રીતે સિદ્ધ થશે.

*આ રીતની સત્યતા બૂમીતિની છઠી બૂક પ્રમાણે છે.

(૬૨)

થવા પરીધના અર્દને વ્યાસના અર્દે ગુણવા.

$$\text{ગોળના ક્ષેત્રફળ} = \frac{\text{વ્યાસ} \times \text{પરીધ}}{૪} \text{ પણ પરીધ} = \text{વ્યાસ} \times ૩.૧૪૧૬$$

$$\text{છે મારે} = \frac{\text{વ્યાસ} \times \text{પરીધ અથવા વ્યાસ} \times ૩.૧૪૧૬}{૪} =$$

$$\frac{\text{વ્યાસ} \times \text{વ્યાસ} \times ૩.૧૪૧૬}{૪} \text{ જોડશે } \frac{\text{વ્યાસનો વર્ગ} \times ૩.૧૪૧૬}{૪}$$

$$\text{અથવા વ્યાસનો વર્ગ} \times \frac{૩.૧૪૧૬}{૪} \text{ અથવા વ્યાસનો વર્ગ} \times$$

.૭૮૫૪. મતલબ કે વ્યાસના વર્ગને .૭૮૫૪ વડે ગુણવાથી ગોળનું ક્ષેત્રફળ નીકળે છે અથવા ગોળના ક્ષેત્રફળ =
 $\frac{\text{વ્યાસનો વર્ગ} \times ૩.૧૪૧૬}{૪}$ છે. પણ ત્રિજ્યા વ્યાસથી અરધી છે

માટે ત્રિજ્યાના વર્ગના ચારગણા = વ્યાસનો વર્ગ થાય તેથી ગોળના ક્ષેત્રફળ = $\frac{\text{ત્રિજ્યાનો વર્ગ} \times ૩.૧૪૧૬ \times ૪}{૪} = \text{ત્રિજ્યાનો વર્ગ} \times ૩.૧૪૧૬$

$$\text{વળી ગોળના ક્ષેત્રફળ} = \frac{\text{વ્યાસ} \times \text{પરીધ}}{૪} \text{ પણ પરીધનો } ૩.૧૪૧૬$$

$$\text{મોભાગ વ્યાસ છે મારે ગોળના ક્ષે.ફ.} = \frac{\text{પરીધ} \times \text{પરીધ}}{૪} \div ૩.૧૪૧૬$$

અથવા પરીધનો વર્ગ $\div ૪ \times ૩.૧૪૧૬$. અથવા પરીધનો વર્ગ $\div ૧૨.૫૬૬૪$. અથવા પરીધનો વર્ગ $\times .૦૭૮૫૮$.

એક મોટા ગોળમાં નાનો ગોળ હોય તો તે બે ગોળના બંને પરીધો વચ્ચે કેટલું અંતર છે અથવા નાના ગોળથી મોટા ગોળ કેટલો મોટો છે તે કહાડવું હોય તો મોટા ગોળના ક્ષેત્રફળમાંથી નાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ બાદ કરવું. એવું કારણ દેખીતું છે. પણ બંને ગોળના પરીધ આપ્યા હોય તો મોટા ગોળના ક્ષેત્રફળ - નાના ગોળના ક્ષેત્રફળ = મોટા

ગોળના વ્યાસ^૨ $\times ૭૮૫૪$ —નાના ગોળનો વ્યાસ^૨ $\times ૭૮૫૪$
અથવા મોટા ગોળના વ્યાસનો વર્ગ—નાના ગોળના વ્યાસ^૨
 $\times ૭૮૫૪$ એટલે બંને ગોળના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી બરા-
બર=બંને ગોળના વ્યાસોના વર્ગોની બાદબાકી $\times ૭૮૫૪$
અથવા બંને વ્યાસોના સરવાળાને તે બે વ્યાસોની બાદ-
બાકીએ ગુણી તેને ૭૮૫૪ એ ગુણુવા. કેમકે કોઈ પણ બે
સંખ્યાનો સરવાળો ને તેજ બે સંખ્યાની બાદબાકીનો ગુ-
ણાકાર તે, તે બે સંખ્યાના વર્ગોની બાદબાકી બરાબર છે.
જેમકે $(૬+૪) \times (૬-૪) = ૬^૨ - ૪^૨ = ૨૦$. મોટા વ્યાસ^૨—નાના
વ્યાસ^૨ = મોટા વ્યાસ+નાનો વ્યાસ \times (મોટા વ્યાસ—નાનો વ્યાસ)
ધનફળ.

જેમ સપાટ જગાના માપને ક્ષેત્રફળ કહે છે, તેમ ન-
ક્કર પદાર્થના ધન માપને ધનફળ કહે છે. નક્કર પદાર્થને
લંબાઈ, પહોળાઈ ને જડાઈ હોય છે. થાંભલો, મોલ, શંકુ,
ગોળો. એ નક્કર પદાર્થ છે. એ પદાર્થોના પ્રીઝમ, ધન, વર્તુળ,
શંકુ, ગોળ, વગેરે આકાર હોય છે.

કાટખુણુ પ્રીઝમનું ધનફળ કહાડવું હોય તો તેની લં-
બાઈ, પહોળાઈ, ને જડાઈનો ગુણાકાર કરવો. કારણ—સ-
પાટ સફાઈના આકારનું માપ ચોરસ માપથી મપાય છે, તેમ
નક્કર પદાર્થ ધનમાપથી મપાય છે. ધનમાપ એટલે જેમાપ
લંબાઈમાં, પહોળાઈમાં, ને જડાઈમાં, સરખું હોય. જેમકે
એક ધનઈંચ એટલે એક ઈંચ લાંબું. એક ઈંચ પહોળું ને
એક ઈંચ જડું. એક ધનફૂટ એટલે એક ફૂટ લાંબું, એક
ફૂટ પહોળું ને એક ફૂટ જડું. હવે એક નક્કર પદાર્થ કાટખુણુ
પ્રીઝમ હોય ને તે ૪ ફૂટ લાંબો, બે ફૂટ પહોળો ને ત્રણ ફૂટ
ઢંચો. અથવા જડો હોય તો તેમાંથી કેટલા ધનફૂટ ની જો?
ચાર ફૂટ લંબાઈમાંથી એક ફૂટ લાંબા કડકા કહાડીએ તો
ચાર થાય પણ તે ત્રણ ફૂટ લાંબાને ૨ ફૂટ પહોળા હોય. હવે

પહોળાઈ પણ એકેક ધૂટ રહે એવા કડકા કરેતો બધા મળીને ૮ થાય, પણ તે દરેક ત્રણ ધૂટ ભડા હોય. માટે દરેક એક એક ધૂટ ભડો રહે એવા કરેતો બધા મળીને દરેક એક ધૂટ લાંબો, એક ધૂટ પહોળો ને એક ધૂટ ભડો એવા ૨૪ કડકા થાય. ને એ ૨૪ તે ૪ ધૂટ લાંબાઈ ૨ ધૂટ પહોળાઈ ને ત્રણ ધૂટ ભડાઈના ગુણાકારની બરાબર થાય છે.

ધન આકારનું ધનદ્વગ તેની એક બાજુના ધનની બરાબર છે. કેમકે ધન આકારની લાંબાઈ પહોળાઈ ને ભડાઈ સરખી છે, માટે એ ત્રણેનો ગુણાકાર તે એક બાજુના ધનની બરાબર થવો જોઈએ. ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થનું ધનદ્વગ કહાડવું હોયતો પાયાના ક્ષેત્રદ્વગને ઉંચાઈએ ગુણવા. કેમકે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થ એ કાટખુણુ પ્રીઝમનું અરધ છે ને તેનું ધનદ્વગ તેની લાંબાઈ×પહોળાઈ×ઉંચાઈ છે એટલે એક બાજુના ક્ષેત્રદ્વગને ઉંચાઈએ ગુણવાથી આવે છે. ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થના પાયાનું ક્ષેત્રદ્વગ તે તેની લાંબાઈ ને પહોળાઈના ગુણાકારનું અરધ છે, માટે તેને ઉંચાઈએ ગુણીશું તો ગુણાકાર કાટખુણુ પ્રીઝમના ધનદ્વગના અરધ જેટલો આવશે, એટલે તે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થનું એટલે કાટખુણુ પ્રીઝમના અર્ધનું ધનદ્વગ થવું જોઈએ.

ગોળ ચાંબકાનું ધનદ્વગ તેના પાયાના ક્ષેત્રદ્વગને ઉંચાઈએ ગુણવાથી આવે છે, કેમકે એ ગોળ ચાંબકો બધેથી સરખો હોવાને લીધે પાયાના ક્ષેત્રદ્વગ જેટલુંજ માપ છેવટસુધી હોય છે.

કોઈ શંકુ આકારનું ધનદ્વગ કહાડવું હોયતો તેના પાયાના ક્ષેત્રદ્વગને ઉંચાઈએ ગુણી ત્રણે ભાગવા, કેમકે ત્રિકોણાકાર નક્કર પદાર્થ જેમ કાટખુણુ પ્રીઝમનો અરધાભાગ છે તેમ શંકુ આકાર નક્કર પદાર્થ કાટખુણુ પ્રીઝમનો ત્રિજો ભાગ છે. એટલે કાટખુણુ પ્રીઝમના ત્રિકોણાકાર નક્કર ભાગ કરીએ તો ૨, ને શંકુ આકાર નક્કર ભાગ કરીએ તો

તણ થાય છે. *

દીકા-શંકુનો પાયો ગોળજ હોય એમ નથી. ત્રિકોણાકાર, ચોરસ વગેરે જનનો પણ હોય. માટે જે જનનો પાયો હોય તેનું ક્ષેત્રફળ કહાડવાની રીતે ક્ષેત્રફળ કહાડી ઉંચાઈએ ગુણુવાથી તે શંકુનું ધનફળ આવશે,

ગોળાનું ધનફળ.

બન્ની તરફથી સરખો ગોળ હોય તેને ગોળો કહે છે. એ ગોળો બંને તરફથી ખુલ્લા * એવા એક ભુગંગામાં રહેતો તે ભુગંગાના ધનફળનું $\frac{2}{3}$ ધનફળ એ ગોળાનું થાયછે એવા ભુગંગાને સીલીંડર કહેછે. એ સીલીંડરની ઉંચાઈ અને ગોળાનો વ્યાસ સરખો હોવો જોઈએ. તેમજ સીલીંડરના ગોળનો પરીધ ને ગોળાનો પરીધ પણ સરખો હોયછે.

ગોળાનું ધનફળ કહાડવું હોય તો ગોળાના પૃષ્ઠફળને આંસે (વ્યાસે) ગુણી તેના $\frac{1}{2}$ લેવા અથવા છ એ ભાગવા.

કારણ—સીલીંડરનું પૃષ્ઠફળ કહાડવું હોયતો સીલીંડરના પરીધને ઉંચાઈએ ગુણુવા. અથવા વ્યાસના વર્ગને ૩.૧૪૧૬ એ ગુણુવા. કેમકે ઉંચાઈ ને વ્યાસ સરખાં છે. પણ વ્યાસના વર્ગને ૩.૧૪૧૬ એ ગુણી ચારે ભાગે તો સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ આવે માટે $\frac{\text{વ્યાસ}^2 \times ૩.૧૪૧૬}{૪}$

= સીલીંડરના પાયાના ગોળનું ક્ષેત્રફળ. તેને ઉંચાઈએ અથવા વ્યાસે ગુણે તો તે સીલીંડરનું ધનફળ આવે. માટે

* આ બાબતની સિદ્ધતા નક્કર ભૂમીતિથી થઇ શકે છે, માટે તે આ જગાએ લખવી નકામી છે. પણ એક કાટ-ખુણુ પ્રીઝમ લઇ તેના ત્રિકોણાકાર ને શંકુ આકાર નક્કર ભાગ કરી જોયાથી શીખનારની ખાતરી થશે.

† આ બાબતની સિદ્ધતા નક્કર ભૂમીતિથી થઇ શકે છે.

$$\frac{\text{વ્યાસ}^2 \times 3.1416 \times \text{વ્યાસ}}{4} \times \text{વ્યાસ} = \text{સીલિંડરનું ધનકુળ, અ-}$$

$$\text{થવા તેના } \frac{1}{4} \text{ ને ગોળાનું ધનકુળ માટે } \frac{\text{વ્યાસ}^2 \times 3.1416 \times \text{વ્યાસ}}{4}$$

ના $\frac{1}{4} = \text{વ્યાસ}^2 \times 3.1416 \times \text{વ્યાસના } \frac{1}{4}$ એ ગોળાનું ધનકુળ.
પણ વ્યાસ $^2 \times 3.1416$ એ ગોળાનું પૃષ્ઠકુળ છે માટે
ગોળાનું પૃષ્ઠકુળ $\times \text{વ્યાસ}$ (આંસ)ના $\frac{1}{4} =$ ગોળાનું ધનકુળ આવે.

અથવા વ્યાસ $^2 \times 3.1416 \times \text{વ્યાસના } \frac{1}{4}$ અથવા વ્યાસ
 $\times 3.1416$ ના $\frac{1}{4}$ એ ગોળાનું ધનકુળ આવે પણ ૩.૧૪૧૬
ના $\frac{1}{4} = .૫૨૩૬$ છે માટે વ્યાસ $^2 \times .૫૨૩૬ =$ ધનકુળ.

પરીધ $\times \text{વ્યાસ} = \text{સીલિંડરનું પૃષ્ઠકુળ ઓટલે:—}$

$$\frac{\text{પરીધ} \times \text{પરીધ}}{3.1416} = \frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416} \text{ સીલિંડરનું પૃષ્ઠકુળ}$$

પણ $\frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416} \div 4$ એ સીલિંડરના પાયાના ગોળાનું ક્ષેત્ર-
કુળ છે તેને વ્યાસે ગુણે તો સીલિંડરનું ધનકુળ આવે માટે

$$\frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416 \times 4} \times \text{વ્યાસ અથવા } \frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416 \times 4} \times ૩.૧૪૧૬ =$$

$$\frac{\text{પરીધ}^2}{(3.1416)^2 \times 4} \text{ સીલિંડરનું ધનકુળ. તેના } \frac{1}{4} \text{ તે ગોળાનું ધનકુળ માટે}$$

$$\frac{\text{પરીધ}^2}{(3.1416)^2 \times 4} \times \text{ના } \frac{1}{4} \text{ ના } \frac{1}{4} = \frac{\text{પરીધ}^2}{(3.1416)^2} \text{ ના } \frac{1}{4} \text{ ગોળાનું ધનકુળ.}$$

$$\text{માટે ગોળાના ધનકુળ} = \frac{\text{પરીધ}^2}{૫૬.૨૪૨૬૬} \text{ અથવા પરીધના ધનના}$$

$$\frac{1}{૫૬.૨૪૨૬} \text{ અથવા પરીધ}^2 \times ૦.૦૧૬૮૮$$

ઉપરની સિદ્ધતા બીજી રીતે કરીએ તો—

ગોળાના ધનકુળ $= \text{વ્યાસ}^2 \times .૫૨૩૬$ પણ વ્યાસ કરતાં
પરીધ ૩.૧૪૧૫૮૭ ગણો છે માટે વ્યાસના ધન કરતાં ૪-

ધનો ધન (૩.૧૪૧૬) ગણો વધારે આવે માટે વ્યાસના ધનને
 ને ૫૨૩૬ વડે ગુણવાના છે તેને બદલે પરીધના ધનને
 $\frac{૫૨૩૬}{૩.૧૪૧૬}$ ૩ વડે ગુણવાના આવે પણ $\frac{૫૨૩૬}{૩.૧૪૧૬}$ ૩ ને
 ૦૧૬૮૮ છે માટે વ્યાસના ધનને ૦૧૬૮૮ ગુણવા.

પૃષ્ઠફળ.

નકકર આકૃતિઓની સપાટીના ક્ષેત્રફળને પૃષ્ઠફળ કહે
 છે. ગોળાની સપાટી એક હોય પણ પેટીને ૬ હોય. જ્યારે
 ધણી સપાટ સફાઈ હોય તો તે બધી સફાઈના ક્ષેત્રફળ
 નો સરવાળો કરવાથી તે આકૃતિનું પૃષ્ઠફળ નીકળે. પેટીની
 છએ બાજુનું જુદું જુદું ક્ષેત્રફળ કઢાડી સરવાળો કરવાથી
 પેટીની બધી સપાટીઓનું પૃષ્ઠફળ થાય. જ્યારે લંબાઈ, ઉં-
 ચાઈ ને પહોળાઈ જુદી જુદી હોય ત્યારે એ પ્રમાણે કરવું પડે.
 પણ ત્રણેયનાં સરળાં હોય તો એક તરફનું ક્ષેત્રફળ કઢા-
 ડવું તેટલુંજ બધી બાજુનું હોય, માટે તે ક્ષેત્રફળના છ
 ગણા કરવાથી તે પદાર્થનું પૃષ્ઠફળ આવે. લંબાઈ, પહો-
 લાઈ ને લંબાઈ સરળાં હોય એવા પદાર્થને ધન કહેછે. ધ-
 નને પણ છ બાજુ હોય છે, માટે તેના એક તરફના ક્ષેત્ર-
 ફળના છ ગણા કરવાથી તે ધનનું પૃષ્ઠફળ આવી રહે છે.

ગોળાનું પૃષ્ઠફળ કઢાડવું હોય તો તે ગોળાના વ્યાસ
 ને પરીધના ગુણાકાર કરવા.

કારણ—એક ગોળાનું પૃષ્ઠફળ તેને ફરતા સીક્ષીડ-
 રના પૃષ્ઠફળની બરાબર રહે. અને સીક્ષીડરનું પૃષ્ઠફળ તેના
 પાયાના ગોળના પરીધને ઉંચાઈએ ગુણવાથી આવે છે. આ
 સિદ્ધતા તે ભૂગંગને ઉકેલી જોવાથી માલમ પડશે. કેમકે
 એ ભૂગંગને ઉકેલ્યાથી ચોખ્ખું થશે તેથી તેની ઉંચાઈ તે
 લંબાઈ ને પાયાના ગોળનો પરીધ તે પહોળાઈ થશે. એટલે
 તે ભૂગંગના પત્રાનું ક્ષેત્રફળ, લંબાઈ ને પહોળાઈના ગુણા-

નકકર ભૂમીતિની સહાયતાથી આ સિદ્ધતા સિદ્ધ થશે,

કાર બરાબર છે એવું આપણે પાછળ સિદ્ધ કરી ગયા, માટે તે પહોળાઈએ પરીધને ઉંચાઈ એટલે વ્યાસનો ગુણાકાર તે સીલીંડરનું ક્ષેત્રફળ, તે તેટલુંજ ક્ષેત્રફળ એ સીલીંડરમાં ગાઈ રહે એવા ગોળાનું હોય છે. માટે તે ગોળાના વ્યાસ તે પરીધનો ગુણાકાર તે ગોળાનું પૃષ્ઠફળ થશે.

એટલે ગોળાના પૃષ્ઠફળ = પરીધ \times વ્યાસ

$$\text{અથવા } \parallel \parallel = \frac{\text{પરીધ} \times \text{પરીધ}}{3.1416} = \frac{\text{પરીધ}^2}{3.1416}$$

$$\text{અથવા } \parallel \parallel = \text{વ્યાસ} \times 3.1416 \times \text{વ્યાસ} = \text{વ્યાસ}^2 \times 3.1416$$

શંકુનું પૃષ્ઠફળ કહાડવું હોય તો તેના પાયાના પરીધને શંકુની તીરકસ બાજુના ગુણાકારનું અર્ધ કરવું, કેમકે શંકુ ગોળ હશે તો તેનું પૃષ્ઠફળ તેના ગોળ થાંભલાના પૃષ્ઠફળથી અથવા બાજુવાળો હશે તો તેનાં પૃષ્ઠોનું પૃષ્ઠફળ તેના પ્રીઝમના પૃષ્ઠફળથી અરધું થશે. પછી તેમાં પાયાનું પૃષ્ઠફળ ઉમેરવાનું હોય તો જુદું ઉમેરવું.

ગોળ થાંભલાનું પૃષ્ઠફળ કહાડવું હોય તો તેના પાયાના પરીધને ઉંચાઈએ ગુણવા. પણ તેમાં પાયાનું ક્ષેત્રફળ ઉમેરવું હોય તો તે કહાડીને ઉમેરવું. આની સિદ્ધતા સીલીંડરના પૃષ્ઠફળની સિદ્ધતા જેવીજ છે.

મિશ્રરાશિ.

એક જાતની જુદા જુદા ભાવની ચીજને મિશ્ર કરી તે શા ભાવે વેચવાથી સરભર થાય, કેવા અમુક નફો મળે તે જોળી કહાડવાની રીતને મિશ્રરાશિ કહે છે.

એ રીતના દાખવા જુદી જુદી ત્રિરાશિઓ કરવાથી થાય છે પણ તે સાંકળ રીત કે પંચરાશિની રીત ગણવાથી વખત ને મહેનત વધારે પડે છે તે બચાવવા માટે મિશ્રરાશિ છે.

જુદા જુદા ભાવની વસ્તુઓનું વજન આપ્યું હોય

તે પરથી મિશ્રનો દર કઢાડવો હોય તો દરેક ભાવને વજનનો ગુણાકાર કરવો. એ ગુણાકારેના સરવાળાને બધા વજનના સરવાળાએ ભાગવા તે જવાબ. એ જવાબ સરભર ભાવ આવશે એટલે નફો નોટો ન જાય એવો ભાવ આવશે. પણ નફો લેવો હોયતો બધા ગુણાકારેના સરવાળામાં તેટલો નફો મેળવીને બધા વજનના સરવાળાએ ભાગવા.

કારણ—એક ભાવનું વજન આપ્યું હોય તે ભાવને વજનનો ગુણાકાર તે, તે વજનની કીમત થશે. કેમકે ૪૩ ના ભાવનું ૫ મણુ એટલે $43 \times 5 = 215$ એ ૫ મણુની કીમત થઈ. તેજ પ્રમાણે દરેક ભાવને વજનનો ગુણાકાર તે વજનની કીમત આવશે એટલે બધા ગુણાકારેનો સરવાળો તે, બધા વજનના સરવાળાની કુલ કીમત થઈ. માટે તે કુલ કીમતને કુલ વજનને ભાગ્યાતો મિશ્ર એક મણુની કીમત આવશે.

જુદા જુદા ભાવની વસ્તુઓનું મિશ્ર અમુક ભાવે પાડ્યું હોય તો તે વસ્તુઓ કેટ કેટલી લેવી એમ કહેતો—તે બધા ભાવને ઉભી હારમાં લખી જે મિશ્રનો ભાવ હોય તે એ બધા ભાવનો ડાબી બાજુએ લખવો. પછી તે મિશ્ર ભાવ કરતાં એક ભાવ ઓછો ને એક વત્તો ભાવ લેઈ સરખાવવા એટલે મિશ્રને ઓછા ભાવની બાદબાકી વત્તા ભાવ આગળ અને મિશ્રને વત્તા ભાવની બાદબાકી ઓછા ભાવ આગળ એમ લખવું. એજ રીતે બીજા બે ભાવ લેઈ લખવું. એ પ્રમાણે મિશ્ર કરતાં એક ઓછો ને એક વત્તો ભાવ લેવો. જે મિશ્ર કરતાં એક ભાવ ઓછો ને બાકીના બધા ભાવ વત્તા હોય તો તે ઓછો ભાવ દરેક વત્તા ભાવ સાથે સરખાવવામાં આવશે તેમજ એક વત્તો ને બીજા ઓછા હોય તો પણ તેમજ થશે. મતલબ કે મિશ્રના ભાવ કરતાં એક વત્તો કે એક ઓછો ભાવ તો હોવાજ જોઈએ. બધા વત્તા કે બધા ઓછા ભાવ હોયજ નહીં. પછી દરેક ભાવ આગળ જે

બાદબાકીઓ મૂકી હોય તેનો સરવાળો લેવો. એ દરેક સરવાળા જોટવું દરેક ભાવનું વજન આવશે.

કારણ—એક ભાવ ઓછો અને એક ભાવ વધો લેવાથી ઓછે ભાવે લાવેલા માત્ર મિશ્રને ભાવે લેવાથી જોટણા નફા રહે છે તેટલાજ જોટ વને ભાવે લેઈ મિશ્રને ભાવે લેવાથી વળશે. તેથી દરેક વખતે સરખર થઈ રહે છે.

ટીકા—આપણા દાખલાના જવાબ એક કરતાં વધારે આવશે, કેમકે એક જવાબ કહાડ્યા પછી તેને કાઢી પાણુ સંખ્યાઓ ગુણવાથી અથવા ભાગવાથી નફા નુકશાન જરાબર રહે છે.

પાણુ ઉપરથી જાનના દિસાખમાં કોઈ અમુક જાનના ભાવનું વજન આપ્યું હોય તો તે પ્રમાણમાં જીવન ભાવનું વજન, લેવું જોઈએ. એટલે ઉપરની રીત પ્રમાણે દરેક ભાવનું વજન કહાડ્યા પછી જો ભાવનું વજન આપ્યું હોય તે વજન, તે ભાવનું જોટવું વજન આપે તે કરતાં જોટણા ગણું વતું કે ઓછું હોય, તેટલા ગણું વતું કે ઓછું દરેક ભાવનું લેવું જોઈએ એ ઉધાડુંજ છે.

તેમજ દરેક જાનનું કેટકેટલું વજન લેવું કે કુલ મિશ્રનું અમુક વજન થાય એમ કહેવું હોય તો ઉપરની રીતે દરેક ભાવનું વજન કહાડી પછી તેનો સરવાળો કરવો. એ સરવાળા કરતાં કુલ આપેલું વજન જોટણા ગણું હોય તેટલા ગણું દરેક ભાવનું વધારે લેવું જોઈએ એ પણ સ્પષ્ટ છે.

શ્રેઢી.

જો કેટલીક સંખ્યા અમુક નિયમ પ્રમાણે વધે અથવા ઘટે તો તે સંખ્યાના જગ્યાને શ્રેઢી કહે છે. એ શ્રેઢી બે પ્રકારની છે. ગણિત પ્રમાણુ ને ભૂગણિત પ્રમાણુ. જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યા કોઈ સરખે આંતરે વધે અથવા ઘટે ત્યારે તે શ્રેઢીને ગણિત પ્રમાણુ શ્રેઢી કહે છે; ને જ્યારે શ્રેઢીની સંખ્યાઓ પહેલી કરતાં બીજી ને બીજી કરતાં ત્રીજી અમુક ગણી વધે

અથવા ઘટે. ત્યારે તે શ્રેણીને મૂળીની પ્રમાણ શ્રેણી કહે છે. બ્યારે શ્રેણીની સંખ્યા એક કરતાં બીજી વધારે અથવા ઘટતી હોય ત્યારે તેને ચડતી શ્રેણી, તે શ્રેણીના સંખ્યા એક કરતાં બીજી ઓછી અથવા ઉતરતી હોય ત્યારે તેને ઉતરતી શ્રેણી કહે છે.

ગણિત પ્રમાણ શ્રેણી.

શ્રેણીમાં 'પહેલું' પદ હોય તેને આદિપદ, છેલ્લા પદને અંતિમપદ, એક કરતાં બીજું 'જેટલું' કે 'જેટલા' ગણતું વધારે હોય તેને ઉપર કે યુગ્મોત્તર, શ્રેણીમાં 'જેટલી' સંખ્યા હોય તેને પદ સંખ્યા કે ગચ્છ અને એ બંની સંખ્યાના સરવાળાને સર્વધન કહે છે. મનસૂચ શ્રેણીમાં આદિ પદ, અંતિમપદ, ઉત્તર, ગચ્છ, તે સર્વધન એ પાંચવાનાં હોય છે. એ પાંચમાંનાં કેઈ પણ ત્રણ આખ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનાં નીકળી શકે છે. ૨, ૫, ૮, ૧૧, ૧૪, ૧૭, ૨૦ એ સાત સંખ્યાની શ્રેણીમાં ૨ આદિપદ, ૨૦ અંતિમપદ, ૩ ઉત્તર, ૭ ગચ્છ તે એ બધીનો સરવાળો ૭૭ એ સર્વધન છે.

શ્રેણીનાં પાંચમાંનાં ત્રણવાનાં આખ્યાં હોય તે બાકીનાં કદાડવાની રીતો છે, તે સમજાવતા પહેલાં શ્રેણીની સંખ્યાના ગુણુ બાણુવા બેઠાંએ. એ ગુણુ સમખ્યાથી શ્રેણીની રીતોનાં કારણુ જલદીથી સમજાશે.

૧ શ્રેણીની દરેક આગલી સંખ્યા તેની પહેલાંની સંખ્યા કરતાં અમુક સંખ્યા વધારે હોય છે. એટલે પહેલી સંખ્યામાં ઉત્તર મેળવીએ તો બીજી સંખ્યા, અને બીજીમાં ઉત્તર મેળવીએ અથવા પહેલીમાં ઉત્તર બે વાર મેળવીએ એટલી ત્રીજી સંખ્યા હોય છે. ત્રીજીમાં ઉત્તર મેળવીએ અથવા પહેલીમાં ઉત્તર ત્રણ વાર મેળવીએ એટલી ચોથી સંખ્યા હોય છે. એ પ્રમાણે જેટલામી સંખ્યા કદાડવાની હોય તેમાંથી એક બાદ કરીએ તેટલી વાર ઉત્તર પહેલીમાં મેળવીએ તેટલી તે સંખ્યા હોય છે. જેમકે ઉપલી શ્રેણીમાં પહેલાં ૨ છે તે દશમી

સંખ્યા કહાડવી હોય તો $૧૦-૧=૯$ વાર ઉત્તર લેઈએ તો ૨૭ થાય તેટલામાં ૨ મેગનીએ તો ૨૯ એ દશમી સંખ્યા આવે. પણ જો ઉત્તરની શ્રેણી હોય તો પહેલી સંખ્યામાંથી જેટલામી સંખ્યા કહાડવી હોય તેમાંથી એક એછો એટલી વાર ઉત્તર બાદ કરવાથી આવે. કેમકે ઉપરનાજ દાખલાને ઉત્તરનાંએ ને પહેલી સંખ્યા ૨૯ લેઈએ ને દશમી સંખ્યા કહાડવી હોય તો $૧૦-૧=૯$ ને ઉત્તર ગણા લેઈ ૨૯માંથી બાદ કરીશું તો દશમી સંખ્યા ૨ આવશે. એટલે ચઢતા શ્રેણીમાં પહેલી સંખ્યામાં ઉમેરવા ને ઉત્તરની શ્રેણીમાં બાદ કરવાથી તે સંખ્યા નીકળશે. હવે જેટલામી સંખ્યા કહાડવી હોય તેને અંતપદ ગણીએ તો ચઢતી શ્રેણીમાં અંતપદ = આદિપદ + $(ગચ્છ-૧) \times$ ઉત્તર આ પ્રમાણે કાઠો થયો. પણ ઉત્તરની શ્રેણીમાં અંતપદ = આદિપદ - $(ગચ્છ-૧) \times$ ઉત્તર આવે કાઠો થયો.

૨ વગી ગચ્છ-૧ ને ઉત્તરે ગુણી આદિપદમાં ઉમેરવાથી અંતપદ આવે છે. એ રીત ઉપરથી જો સંખ્યાની વચમાં ગમે તેટલાં સરખા અંતરનાં પદ મૂકવાથી ઉત્તર કેટલું રાખવું તે કહાડી શકાય છે. કેમકે $(ગચ્છ-૧) \times$ ઉત્તર + આદિપદ = અંતપદ છે. હવે આદિપદને અંતપદ આપ્યું હોય તો અંતપદમાંથી આદિપદ બાદ કરીશું તે $(ગચ્છ-૧) \times$ ઉત્તર રહેશે. તેને ગચ્છ-૧ વડે ભાગીએ તો ઉત્તર આવે. ઉપલાજ દાખલામાં ૨ને ૨૯ની વચમાં આઠ પદ મૂકવાં હોય તો કુલ ૧૦ ગચ્છ સંખ્યા થઈ. તેમાંથી એક બાદ કર્યો તો ૯ રહ્યા તેણે ૨૯-૨ને ભાગ્યા તો ૩ ઉત્તર આવ્યા અથવા ઉત્તરની શ્રેણી હોય તો આદિ પદમાંથી અંતપદ બાદ કરી તેને નવે ભાગીશું તો પણ ૩ ઉત્તર આવશે. એટલે ઉત્તર કહાડવું હોય તો ચઢતા શ્રેણીમાં $\frac{\text{અંતપદ}-\text{આદિપદ}}{\text{ગચ્છ-૧}}$ અને ઉત્તરની શ્રેણીમાં $\frac{\text{આદિપદ}-\text{અંતપદ}}{\text{ગચ્છ-૧}}$

૩. જો ઉપરનીજ શ્રેણીમાં ગચ્છ સંખ્યા કહાડવી હોય

તોપણ નીકળશે. કેમકે ઉત્તરને ગચ્છ-૧ ગુણી આદિપદમાં મેળવ્યાની અંતપદ આવે છે. માટે અંતપદમાંથી આદિપદ બાદ કરી ઉત્તરે ભાગીએ તો ગચ્છ-૧ આવે. માટે તે આ-ગાકારમાં એક મેળવ્યાથી ગચ્છ આવશે. જેમકે ઉપરનીજ શ્રેઢીમાં અંતપદ-આદિપદ=૨૭ છે તેને ઉત્તર ૩ ભાગ્યા તો ૯ આવ્યા એ ગચ્છ-૧ની જરાબર છે માટે ૬+૧=ગચ્છઆવશે.

૪ એજ ઉપરથી આદિપદ કઢાડવું હોય તો પણ નીકળશે કેમકે (ગચ્છ-૧)×ઉત્તર આદિપદમાં મેળવવાથી અંતપદ આવે છે. માટે અંતપદમાંથી (ગચ્છ-૧)×ઉત્તર બાદ કરવાથી આદિપદ આવશે એટલે આદિપદ=અંતપદ-(ગચ્છ-૧)×ઉત્તર.

૫ વળી શ્રેઢીમાં ત્રણ પદ હોય તો પહેલા ને છેલ્લાનો સરવાળો વચ્ચાની જમણાઈ જરાબર થાય. ૨, ૫, ૮ આ શ્રેઢીમાં ૨+૮=૫×૨ છે. માટે વચ્ચું પદ કઢાડવું હોય તો, ૫-હેલા ને છેલ્લા ના સરવાળાને એએ ભાગવાથી નીકળશે. પણ એક કરતાં વધારે પદો જે સંખ્યાની વચમાં મૂકવાં હોય તો-આપેલી જે સંખ્યામાંની એક આદિપદ અંતનીજ અંતપદ થશે. એ ઉપરથી ઉત્તર કઢાડવું જોઈએ જેમકે રને ૨૬ની વચમાં આઠ પદ મૂકવાં હોય તો કુલ દશ પદસંખ્યા થશે. ને તે ઉપરથી પાછળ કહ્યા પ્રમાણે ઉત્તર કઢાડવું તો ત્રણ આવશે. માટે પહેલી સંખ્યા રનો બીજી ૫, ત્રીજી ૮, ચોથી ૧૧, પાંચમી ૧૪, છઠી ૧૭, સાતમી ૨૦, આઠમી ૨૩, નવમી ૨૬ આવશે.

૬ શ્રેઢીમાંની પહેલી ને છેલ્લીનો સરવાળો બીજી ને છેલ્લીની પહેલીના સરવાળા જરાબર છે. કેમકે પહેલી કરતાં બીજી જેટલી વધારે હોય તેટલીજ છેલ્લીની પહેલી કરતાં ઊંટલી વધારે હોય છે. તેમજ વળી પહેલી ને છેલ્લીનો સરવાળો, પહેલેથી ત્રીજી ને છેલ્લેથી ત્રીજી લેખએ તેના સરવાળા જરાબર છે. એ પ્રમાણે પહેલેથી જેટલામી સંખ્યા લેખએ તેટલામીજ છેલ્લેથી લેખ સરવાળો કરીશું તે, આદિ અંતના સરવાળા જરાબર થશે. એ પ્રમાણે પદ સંખ્યાનાં જેટલાં જો-

(૧૦૪)

ડાં કરીશું તે બેડકનો સરવાળો સરળો થશે. જેમકે ૨, ૫, ૮, ૧૧, ૧૪, ૧૭, ૨૦, ૨૩, ૨૬, ૨૯ આ દશ પદ સંખ્યાનાં ૨ને ૨૬, ૫ને ૨૬, ૮ને ૨૩, ૧૧ને ૨૦, ૧૪ને ૧૭, એવાં પાંચ બેડકાં થશે તે દરેકનો સરવાળો ૩૧ થશે. માટે ૩૧ને પાંચ ગણા કરીશું તો એ દશે સંખ્યાનો સરવાળો થવાનો. એટલે $31 \times 5 = 155$ એ દશે પદનો સરવાળો અથવા સર્વધન આપ્યું. આ ઉપરથી એવો નિયમ નીકળે છે કે કોઈ શ્રેણીના સરવાળો કલાડયો હોય તો આદિ ને અંતના સરવાળાને પદ સંખ્યાનાં બેડકાંની સંખ્યાએ ગુણવા એટલે સર્વધન = આદિપદ + અંતપદ \times ગ^૨. પણ બે અંતપદ ન આપ્યું હોય તો મહેત્વી રીત પ્રમાણે અંતપદ કલાડીને પછી ઉપરની રીતે સર્વધન કલાડયું.

૭ પણ બે આદિપદ ૧ એક હોયને ઉત્તર બે હોય તો મહેત્વી સંખ્યાનું સર્વધન તે સંખ્યાના વર્ગ બેટલું આવશે. જેમકે આદિપદ ૧, ઉત્તર ૨ છે તો વીશ સંખ્યાનું સર્વધન વીશના વર્ગ બેટલું ૪૦૦ આવશે.

૮ તેમજ આદિપદ કરતાં ઉત્તર બરાબર હોય તો બેટલી સંખ્યાનું સર્વધન કલાડયું હોય તે સંખ્યાના વર્ગને આદિપદ ગુણવાથી આવશે. જેમકે આદિપદ ૪ ને ઉત્તર ૮ છે તો વીશ સંખ્યાનું સર્વધન $20 \times 4 = 1600$ આવશે. ઉપરની સાતમી ને આઠમી રીતની સિદ્ધતા છઠી રીતે સર્વધન કલાડી બેવાથી માત્રમ પડશે. કેમકે ઉપરની રીતે અંતપદ = આદિપદ + (ગ^૨ - ૧) \times ઉત્તર, માટે અંતપદ = ૪ + (૨૦ - ૧) \times ૮ = ૪ + ૧૫૨ = ૧૫૬. તે ઉપરથી સર્વધન = ૮ (આદિ + અંત) \times ગ^૨ = (૪ + ૧૫૬) \times ૨૦ = ૧૬૦ \times ૧૦ = ૧૬૦૦

ઉપર જે કોઈઓ સમજાવ્યા તે આ નીચે સાગટા લખ્યા છે કે યાદ કરવાને સુગમ પડે.

૧ ચઢતી શ્રેણીમાં અંતપદ = આદિપદ + (ગચ્છ-૧) X ઉત્તર.

ઉત્તરતી શ્રેણીમાં અંતપદ = આદિપદ - [ગચ્છ-૧] X ઉત્તર.

૨ ચઢતી શ્રેણીમાં ઉત્તર = $\frac{\text{અંતપદ} - \text{આદિપદ}}{\text{ગચ્છ} - ૧}$

ઉત્તરતી શ્રેણીમાં ઉત્તર = $\frac{\text{આદિપદ} - \text{અંતપદ}}{\text{ગચ્છ} - ૧}$

૩ ચઢતી શ્રેણીમાં ગચ્છ = $\frac{\text{અંતપદ} - \text{આદિપદ}}{\text{ઉત્તર}} + ૧$

ઉત્તરતી શ્રેણીમાં ગચ્છ = $\frac{\text{આદિપદ} - \text{અંતપદ}}{\text{ઉત્તર}} + ૧$

૪ ચઢતી શ્રેણીમાં આદિપદ = અંતપદ - (ગચ્છ-૧) X ઉત્તર.

ઉત્તરતી શ્રેણીમાં આદિપદ = અંતપદ + (ગચ્છ-૧) X ઉત્તર.

૫ ચઢતી શ્રેણીમાં સર્વધન = $\frac{\text{આદિપદ} + \text{અંતપદ}}{૨} \times \text{ગચ્છ}$

ઉત્તરતી શ્રેણીમાં સર્વધન એટલુંજ આવશે તે એજ રીતે નોકળશે.

શ્રેણીનાં પાંચ વાનાંમાંથી કોઈપણ એક કલાડું હોય તો ઉપરની રીતોની મદદથી નોકળશે. પણ ઉપરની રીતનાં જરૂર પડે એટલાં પદ ન આપ્યાં હોય તો ગાંજલું પદ કલાડનાં લગાર અડચણ પડે છે. માટે એ ઉપલા પાંચ કોઠાની મદદથી દરેક વાનું કલાડવાને જુદી જુદી રીતે બીજા કોઠા આ નીચે ઉત્પન્ન કરી બતાવ્યા છે, એ કોઠા શી રીતે ઉત્પન્ન થયા છે, તે સમજાયાથી તે કોઠા જલદી યાદ રહેશે, અને ભૂલી જશે, તો ફરીને ઉત્પન્ન કરી શકશે.

૬. જો આદિ + ગચ્છ ને સર્વધન ઉપરથી અંત કલાડું હોય તો*

+ કોઠા લખવામાં લખાણ ન થાય, માટે સર્વધનને બુદ્ધે સ. આદિપદને બદલે આ, અંતપદને બદલે અં ગચ્છ ને બદલે ગ. ને ઉત્તરને બદલે ઉ. લખેલું છે.

* આ સિદ્ધતા માત્ર અમીરણ શીખેલાજ સમગ્ર શકે તેવી છે, તોપણ તે શીખેલા સમગ્ર શકે, માટે આપીએ.

આપણે છઠી કલમમાં કહી ગયા કે આદિપદ ને અંત પદના સરવાળાને પદ સંખ્યાના અર્ધે ગુણાએ, તો સર્વધન આવે. એટલે પદ સંખ્યાએ ગુણે તો સર્વધનના બમણા આવે. માટે સર્વધનના બમણાને પદ સંખ્યાએ ભાગે તો આદિપદ ને અંતપદનો સરવાળો આવે. તેમાંથી આદિપદ બાદ કરે તો અંતપદ રહે. એટલે અંતપદ = $\frac{\text{સર્વધન}}{\text{પદસંખ્યા}} - \text{આદિપદ}$

ઉતરતી શ્રેણીમાં પણ એવું કેટલા કામ લાગશે, કેમ કે ઉતરતી શ્રેણીમાં અંતપદ નાનું હોય, તેમ બાદ કરવાનું આદિપદ મોટું હોય.

૭. વળી ઉતર, ગચ્છને સર્વધન કપ:થી અંતપદ કહાડવું હોયતો—

અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ - ગા. ઉપર નિશ્ચય કરી ગયા. પણ આદિપદ આપ્યું નથી. માટે કપ:નો માથો કોઠો આદિ પદને બદલે મૂક્યાથી અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ - (અં. - ગ. - ૧ × ૩) કૌંસ છાડવ્યાથી અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ - અં. + (ગ - ૧ × ૩). અંતપદ સ્થળાંતર કર્યાથી ૨અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ + ગ. - ૧ × ૩. ∴ અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ + ગ. - ૧ × ૩.

ઉતરતી શ્રેણીમાં અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ - ગ. - ૧ × ૩.

૮. આદિપદ, સર્વધન અને ઉતર ઉપરથી અંતપદ કહાડવું હોયતો—

૬૬૧ કોઠા પ્રમાણે અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ - ગા. પણ ગ. = $\frac{\text{અં. - ગા.} + ૧}{૩}$ છે તે ગ. ને બદલે લખ્યા તો અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ + ૧ - ગા. માટે અં. = $\frac{૨સ.}{૩}$ - ગા. + ૩. એક ઉસડ્યા તો અં. = ૨ - અં. ગા. + અં. ૩ = ૨સ. ૩ - અં. ગા. + ગા. ૨ - ગા. ૩. બન્ને તરફ $\frac{૧}{૩}$ ઉ^૨ ઉમેર્યા તો અં. ૨ + અં. ૩ + $\frac{૧}{૩}$ ઉ^૨ = ૨સ. ૩ + ગા. ૨ - ગા. ૩ + $\frac{૧}{૩}$ ઉ^૨ જમણી તરફ ૩ ગુણુક કહાડ્યો તો અં. ૨ + અં. ૩ + $\frac{૧}{૩}$ ઉ^૨ = ગા. ૨ + ૩(૨સ. - ગા. + $\frac{૧}{૩}$ ઉ^૨). બંને તરફ નુંવર્ગ.

મૂળ કદાડયું તો $અં + \frac{૧}{૨} ઉ = \sqrt{આ^૨ + ૩ (૨સ - આ + \frac{૧}{૨} ઉ)}$. $\frac{૧}{૨} ઉ$

સ્થળાંતર કર્યાથી $અં = \sqrt{આ^૨ + ૩ (૨સ - આ + \frac{૧}{૨} ઉ)} - \frac{૧}{૨} ઉ$ જ.

૯. સર્વધન અંતપદ અને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કદાડયું હોય તો—
સ. = $(આ + અં) \times \frac{૫}{૨}$ છે. માટે $૨ \times સ. = આ + અં. \times ૫$. આવે.

જેને જેને જાણુને ગચ્છ બાગીએ તો $આ. + અં. = ૨ \frac{૫}{૨}$ થાય.

બંનેમાંથી અં. બાદ કરીએ તો $આ. = \frac{૨ \times સ.}{૫} - અં.$ જવાગ.

૧૦ પણ સર્વધન ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કદાડયું

હોય તો—ઉપર સિદ્ધ કર્યા પ્રમાણે $આ. = \frac{૨ \times સ.}{૫} - અં.$ છે. તેમાં

અંતપદને બદલે અંતપદની કિંમત લખીએ તો $આ. = \frac{૨ \times સ.}{૫}$

$-\frac{૨ \times સ. + ૫. - ૧ \times ઉ}{૫}$ માટે $આ. = \frac{૨ \times સ. - (૫. - ૧ \times ઉ)}{૫}$ જવાગ.

૧૧ વળી અંત, સર્વધન અને ઉત્તર ઉપરથી આદિપદ કદાડયું હોય

તો $ઉ = અં^૨ - આ^૨$ છંદ ઉરાડ્યાથી $૨સઉ - અંઉ - આઉ = અં^૨ -$
 $૨સ - અં - આ$

$આ^૨$ સ્થળાંતરથી $આ^૨ - આઉ = અં^૨ + અંઉ - ૨સઉ$ તેમાં બંને

તરફ $\frac{૧}{૪} ઉ^૨$ ઉમેર્યાથી.

$આ^૨ - આઉ + \frac{૧}{૪} ઉ^૨ = અં^૨ + અંઉ - ૨સઉ + \frac{૧}{૪} ઉ^૨$ જગણી તરફ ઉ

ચુલુક કાઢાડ્યાથી $આ^૨ - આઉ + \frac{૧}{૪} ઉ^૨ = અં^૨ + \frac{૩}{૪} (અં - ૨સ + ૩)$

બંને તરફ $\frac{૧}{૪} ઉ^૨$ વર્ગમૂળ કદાડયું તો $આ - \frac{૧}{૨} ઉ = \sqrt{અં^૨ + ૩ અં - ૨સ + ૩}$

સ્થળાંતર કર્યાથી $આ = \sqrt{અં^૨ + ૩ (અં - ૨સ + ૩)} + \frac{૧}{૨} ઉ$

૧૨ આદિ, ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કદાડયું હોય તો

પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સ. = $(આ + અં) \frac{૫}{૨}$ આમાં અંતપદની

પહેલા કોઠા પ્રમાણે કિંમત લખી તો સ. = $[આ + આ + ૫. - ૧ ઉ] \frac{૫}{૨}$

તેથી. સ. = $[૨ આદિ + (ગચ્છ - ૧) ઉત્તર] \frac{૫}{૨}$ જવાગ.

૧૩ અંત, ઉત્તર અને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કદાડયું હોય તો.

પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સર્વધન = $(આદિ + અંત) \frac{૫}{૨}$ એમાં આદિ-

૫૬ની કિંમત ચોથાકોઠા પ્રમાણે લખી. તો સ=[અ'-(ગ-૧)
 ઉ+અ] ગુનેથી. સ=[૨ અંત-(ગચ્છ-૧)ઉત્તર] ગુનેથી.
 ૧૪ આદિ. અંત અને ઉત્તર ઉપરથી સર્વધન કહાડવું હોયતો-
 ૫મા કોઠા પ્રમાણે સર્વ=(અ'+આ) ગુને ત્રીજા કોઠા પ્ર-
 માણે ગચ્છને બદલે તેની કિંમત લખી, તો—

$$સ = \frac{અ' + આ}{૩} + ૧$$

ગુણી નાંખ્યા તો સ = $\frac{અ^૨ - આ^૨}{૨૬} + \frac{અ' + આ}{૨}$ જવાબ.

૧૫ આદિ. સર્વધન અને ગચ્છ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોયતો.
 ૨ જા કોઠા પ્રમાણે ઉત્તર = અ' - આ. ૬ઠા કોઠા પ્રમાણે અંત
 ગચ્છ-૧

૫૬ની કિંમત લખીતો ઉત્તર = $\frac{૨સ - આદિ - આદિ}{ગ - ૧}$

તેથી ઉત્તર = $\frac{૨સ - ૨આ}{ગ - ૧}$ જવાબ.

૧૬ સર્વધન, ગચ્છ અને અંતપદ ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોયતો.
 તો ઉપરના ૧૫મા કોઠા પ્રમાણે ઉત્તર = $\frac{૨સ - ૨આ}{ગ - ૧}$

એમાં નવમા કોઠા પ્રમાણે આદિપદની કિંમત લખી તો
 ઉત્તર = $\frac{૨સ}{ગ} - \frac{૪સ - ૨ અંત}{ગ - ૧}$

તેથી ઉત્તર = $\frac{૨સ - ૪સ + ૨ અંત}{ગ - ૧}$ તેથી ઉત્તર = $\frac{૨સ - ૨અ}{ગ - ૧}$ જ.

૧૭ આદિ. અંત અને સર્વધન ઉપરથી ઉત્તર કહાડવું હોય તો-
 બીજા કોઠા પ્રમાણે ઉત્તર = $\frac{અ - આ}{ગ - ૧}$ તેમાં ગચ્છની કિંમત ૧૮
 મા કોઠા પ્રમાણે લખ્યાથી ઉત્તર = $\frac{અ - આ}{૨સ}$ અથવા ઉ.

તર = $\frac{અ - આ}{૨સ - આ - આ}$ આંશ અને છંદ બંનેને અંત + આદિ એથુ-

જવાબ.
 ૫૯થી ઉત્તર = $\frac{અ^૨ - આ^૨}{૨સ - આ - આ}$

૧૮ આદિ, અંત અને સર્વધન ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતો.
પાંચમા કોઠા પ્રમાણે સર્વધન = (આદિ + અંત) $\frac{૧}{૩}$. બધાને
બમણા કર્યાતો ૨ સર્વધન = (આદિ + અંત) ગચ્છ. બંને તન
૨૬ આદિ + અંતે ભાગ્યાતો ગચ્છ = $\frac{૨સ}{આ + અ}$ જવાબ.

૧૯ આદિ, ઉત્તર અને સર્વધન ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતો.
૩ ના કોઠા પ્રમાણે ગચ્છ = $\frac{અ - આ}{ઉત્તર} + ૧$. તેમાં આં-

તની કીંમત આઠમા કોઠા પ્રમાણે મૂકીતો—

$$ગચ્છ = \sqrt{\frac{ઉત્તર (૨સ - આ + \frac{૧}{૩}) + આ^2 - \frac{૧}{૩}ઉ - આ}{ઉત્તર}} + ૧$$

અથવા આંશ અને છંદને બેએ ગુણ્યા તો—

$$ગચ્છ = \sqrt{\frac{૪૩(૨સ - આ + \frac{૧}{૩}) + ૪આ^2 - ૩ઉ - ૨આ}{૨ઉત્તર}} + ૧ અથવા$$

$$ગચ્છ = \sqrt{\frac{૮સ \times ૩ - ૪આ \times ૩ + ૩^2 + ૪આ^2 ૩ - ૨આ + ૨૩}{૨ઉત્તર}} \text{ અથવા}$$

$$ગચ્છ = \sqrt{\frac{૮સ \times ૩ + ૨આ - ૩, ૨આ - ૩}{૨ઉત્તર}} \text{ જવાબ.}$$

૨૦ અંત, સર્વધન અને ઉત્તર ઉપરથી ગચ્છ કહાડવું હોયતો—

૩ ના કોઠા પ્રમાણે ગ = $\frac{અ - આ}{૩} + ૧$ એમાં ૧૧મા કોઠા પ્ર-

માણે આદિપદની કીંમત લખી તો—

$$ગચ્છ = \frac{અ - (\sqrt{અ^2 + ૩(અ - ૨સ + \frac{૩}{૪} + \frac{૩}{૨})}}{૩} + ૧ \text{ અથવા}$$

$$ગ = અ - \frac{\sqrt{અ^2 + ૩(અ - ૨સ + \frac{૩}{૪}) - ૩}}{૩} + ૧ \text{ અથવા}$$

$$ગ = અ - \frac{\sqrt{અ^2 + ૩(અ - ૨સ + \frac{૩}{૪})}}{૩} - \frac{૧}{૨} + ૧$$

$$\text{માટે } ગ = \frac{અ}{૩} + \frac{૧}{૨} - \frac{\sqrt{અ^2 + ૩(અ - ૨સ + \frac{૩}{૪})}}{૩} \text{ જવાબ.}$$

માદ રહેવા માટે ગણિત શ્રેદીના ઉપલા ૨૦ કોઠા નીચે લખ્યા છે.
ચઢતી શ્રેદી.

$$(૧) આ = અ' - (ગ - ૧) \times ઉ. \quad (૨) આ = \frac{૨સ}{ગ} - અ'$$

$$(૩) આ = \frac{૨સ}{ગ} - (ગ - ૧) \times ઉ$$

$$(૪) આ = \sqrt{અ'^2 + ઉ(અ - ૨સ + \frac{૩}{૪})} + \frac{૩}{૪}(૫) અ' = આ + (ગ - ૧) \times ઉ$$

$$(૬) અ' = \frac{૨સ}{ગ} - આ \quad (૭) અ' = \frac{૨સ}{ગ} + (ગ - ૧) \times ઉ$$

$$(૮) અ' = \sqrt{ઉ(૨સ - આ + \frac{૧}{૪}ઉ) + આ^2 - \frac{૧}{૪}ઉ}$$

$$(૯) ઉ = \frac{અ' - આ}{ગ - ૧} \quad (૧૦) ઉ = \frac{૨સ}{ગ - ૧} - ૨ આ \quad (૧૧) ૨અ' - \frac{૨સ}{ગ} = \frac{૩}{૪}$$

$$(૧૨) ઉ = \frac{અ'^2 - આ^2}{૨સ - અ' - આ} \quad (૧૩) ગ = \frac{અ' - આ}{ઉ} + ૧$$

$$(૧૪) ગ = \frac{૨સ}{અ' - આ} \quad (૧૫) ગ = \sqrt{\frac{(સઉ + (૨આ - ઉ)^2}{૨ઉ}} - \frac{૨આ - \frac{૩}{૪}}{૨ઉ}$$

$$(૧૬) ગ = \frac{અ' + \frac{૧}{૪}}{ઉ} - \sqrt{\frac{અ'^2 + ઉ(અ' - ૨સ + \frac{૩}{૪})}{ઉ}}$$

$$(૧૭) સ = અ' + આ \quad (૧૮) સ = [૨આ + ઉ(ગ - ૧)] \frac{ગ}{૪}$$

$$(૧૯) સ = [૨અ' - ઉ(ગ - ૧)] \frac{ગ}{૪} \quad (૨૦) સ = \frac{અ'^2 - આ^2}{૨ઉ} + \frac{અ' + આ}{૨}$$

ઉતરતી શ્રેદી.

$$(૧) આ = અ' + (ગ - ૧)ઉ \quad (૨) આ = \frac{૨સ}{ગ} - અ' \quad (૩) આ = \frac{૨સ}{ગ} + (ગ - ૧)ઉ$$

$$(૪) આ = \sqrt{૨સઉ - અ'ઉ + અ'^2 + \frac{૧}{૪}ઉ^2 - \frac{૧}{૪}ઉ}$$

$$(૫) અ' = આ - (ગ - ૧)ઉ \quad (૬) અ' = \frac{૨સ}{ગ} - આ \quad (૭) અ' = \frac{૨સ}{ગ} - (ગ - ૧)ઉ$$

$$(૮) અ' = \sqrt{આ^2 - ઉ(૨સ - આ - \frac{૧}{૪}ઉ) + \frac{૧}{૪}ઉ} \quad (૯) ઉ = \frac{આ - અ'}{ગ - ૧}$$

$$(૧૦) ઉ = \frac{આ - અ'}{૨સ - આ - અ'} \quad (૧૧) ઉ = \frac{૨સ}{ગ} - ૨અ' \quad (૧૨) ઉ = \frac{૨આ - ૨સ}{ગ - ૧}$$

$$(૧૩) ગ = \frac{આ - અ'}{ઉ} + ૧ \quad (૧૪) ગ = \frac{૨સ}{અ' - આ}$$

$$(૧૫) ગ = \sqrt{\frac{૨સ+૨અ-૩}{૨૩}} - \frac{૨અ-૩}{૨૩}$$

$$(૧૬) ગ = \frac{અ+૧}{૩} - \sqrt{\frac{અ^૨+૩(અ-૨સ+૩)}{૩}}$$

$$(૧૭) સ = \frac{અ+અ'}{૩} \quad (૧૮) સ = \frac{૨અ+ગ-૧}{૩}$$

$$(૧૯) સ = \frac{૨અ-(ગ-૧)}{૩} \quad ૨૦) સ = \frac{અ^૨-અ'૨}{૩} + \frac{અ+અ'}{૧}$$

ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી.

જ્યારે કેટલીક સંખ્યાઓ એક કરતાં બીજી અમુક ગણી વધારે હોય ત્યારે તે સંખ્યાઓની શ્રેઢીને ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી કહેછે. એવી શ્રેઢીમાં એક સંખ્યા કરતાં બીજી જેટલા ગણી વધારે હોય તેને ગુણોત્તર કહેછે. જ્યારે ગુણોત્તર એક કરતાં વધારે હોય ત્યારે તે શ્રેઢીને ચડતી ને ગુણોત્તર એક કરતાં ઓછું હોય ત્યારે ઉતરતી શ્રેઢી કહેવાય છે. ૧. ૨, ૪. ૮, ૧૬, ૩૨. ૬૪, ૧૨૮, ૨૫૬, ૫૧૨, એ ચડતી શ્રેઢી છે. તે ૬૭૨. ૩૨૪ ૧૦૮. ૩૬, ૧૨, ૪ એ ઉતરતી શ્રેઢી છે. પહેલીમાં ગુણોત્તર બે અને બીજીમાં ૩ છે.

ગણિત પ્રમાણ શ્રેઢીની માફક ભૂમીતિ પ્રમાણ શ્રેઢી માં પણ શ્રેઢીના પહેલા પદને આદિ, છેલ્લા પદને અંત, પદ સંખ્યાને ગચ્છ, બધા સંખ્યાઓના સરવાળાને સર્વધન અને જેટલા ગણ પ્રમાણ હોય તેને ગુણોત્તર કહે છે.

૧. ઉપરની શ્રેઢી ઉપરથી માલમ પડશે કે કોઈ પણ ત્રણ પદો ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તો તેના પહેલા ને ત્રીજાને ગુણાકાર વચલા પદના વર્ગની બરાબર થાય. કેમકે બીજા પદ કરતાં ત્રીજું પદ જેટલા ગણ વધારે હોય તેટલા ગણ મહેલું પદ બીજા કરતાં નાનું હોય છે. ૨. તેમજ ચાર પદો ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તો પહેલા ને છેલ્લાનો ગુણાકાર, વચલા બેના ગુણાકાર બરાબર થશે. ૩. જો સંખ્યાઓ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તે સંખ્યાઓની બાવળાકી પણ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં થશે. ૪. જો ત્રણ સંખ્યા ભૂમીતિ પ્રમાણમાં હોય તો તેમાંની પહેલી: ત્રીજી:: પહેલીનો વર્ગ: બીજી ના વર્ગને. ૫ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં પહેલા પદને ગુણોત્તરે ગુ-

છે તો બીજું પદ, ગુણોત્તરના વર્ગે ગુણે તો ત્રીજું, ગુણોત્તરના ઘને ગુણે તો ચોથું, ગુણોત્તરના ચાર ઘાતે ગુણે તો પાંચમું પદ આવેછે. એ રીતે ઠંટકામાં પદ કદાડતું હોય તેના કરતાં એક ઓછો એટલા ગુણોત્તરના ઘાતે આદિ પદને ગુણવાથી આવશે. ૬. જો ત્રણ પદ પ્રમાણમાં હોય તો પહેલા ને ત્રીજાનો ગુણાકાર બીજાના વર્ગે બરાબર છે માટે પહેલાને ત્રીજાના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ બીજું પદ થશે. ૭. પણ જ્યારે બે પદની વચ્ચે એક કરતાં વધારે પદ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં મૂકવાં હોય ત્યારે તે પ્રમાણનું ગુણોત્તર બોલી કદાડતું જોઈએ. પાંચમા નિયમ પ્રમાણે પ્રમાણના પહેલા પદને ગુણોત્તરે ગુણ્યાથી બીજું, પહેલાને ગુણોત્તરના વર્ગે ગુણવાથી ત્રીજું એ પ્રમાણે પદો આવે છે, એટલે પાંચમા પદની = પહેલું \times ગુણોત્તરનો ચાર ઘાત છે. માટે પાંચમા પદને પહેલા પદે લાગે તો ગુણોત્તરનો ચાર ઘાત આવે, તેથી તેનું ચતુર્ધાત મૂળ તે ગુણોત્તર થશે. ૮. ભૂમીતિ પ્રમાણમાં કોઈ પણ બે પદોનો ગુણાકાર તે બે પદોથી સરખા અંતરનાં બે પદોના ગુણાકારનો બરાબર છે. આ નિયમ બીજા નિયમ ઉપરથી સમજાશે. ગણિત પ્રમાણની પેઠે ભૂમીતિ પ્રમાણમાં પણ પાંચ વાનાં આદિ, અંત, ગચ્છ, સર્વધન અને ગુણોત્તર હોય છે. તેમાંનાં કોઈ ત્રણ પદ આપ્યાં હોય તે ઉપરથી બાકીનું પદ નીકળી શકશે. તે કદાડવાની સિદ્ધતા આ નીચે આપી છે તે ઉપરના આઠ નિયમો બરાબર સમજાયાથી ઝટ ધ્યાનમાં ઉતરશે—

૧ આદિ, ગચ્છ અને ગુણોત્તર ઉપરથી અંત પદ કદાડતું હોયતો—

આદિપદ ને ગુણોત્તરના ગચ્છ ઓછા એક ઘાતે ગુણવા એટલે† આ = આ $\times \frac{ગુ}{ગચ્છ}$ કારણ—ઉપરના પાંચમા નિ-

† કોઠા લખવામાં ગણિત પ્રમાણમાં પદના આખા નામને બદલે આધાક્ષર લખવાનો જે નિયમ રાખ્યો હતો તેજ નિયમ આમાં પણ રાખ્યો છે. જેમકે ગુણોત્તરને બદલે ગુ. ઈ.

થમ પ્રમાણે અંતપદ કહાડવું છે તે દશમું પદ હોય તો ગુ-
ણોત્તરની ગચ્છ અથવા પદ સંખ્યા દશ છે માટે ૧૦-૧=

૯ ધાતે આદિપદને ગુણવાચી દશમું પદ અથવા અંતપદ આવશે.
૨ આદિ ને અંત ઉપરથી વચ્ચું પદ કહાડવું હોયતો-
આદિ ને અંતના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ કહાડવું એટલે
મધ્યપદ = $\sqrt{\text{આ} \times \text{અ}}$

કારણ-છટ્ટા નિયમ પ્રમાણે પહેલા ને ત્રીજા પદને
ગુણાકાર બાબતના વર્ગની ખરાબર છે. તો પહેલા ને ત્રીજા
ના ગુણાકારનું વર્ગમૂળ બીજાપદની ખરાબર થવું જોઈએ.
ઉપરના પ્રમાણમાં આદિપદ પહેલું, અંતપદ ત્રીજું ને મ-
ધ્યપદ એ બીજું પદ છે એ સ્પષ્ટ છે. આ નિયમ ઉપરથી
કોઈ પણ બે પદોને આદિ, અંત ધારીને વચમાં જોઈએ
તેટલાં પદ ભૂમીતિ પ્રમાણમાં મૂકાશે. જેમકે ૨ ને ૫૧૨
એની વચમાં પદ $\sqrt{૨ \times ૫૧૨} = ૩૨$ તેમજ ૨ ને ૩૨ ની
વચમાં ૮, અને ૩૨ અને ૫૧૨ ની વચમાં ૧૨૮ આવશે.
તેથી ૨, ૮, ૩૨, ૧૨૮, ૫૧૨ આ ભૂમીતિ પ્રમાણ થયું.
હજી વધારે મૂકવાં હશે તો મૂકાશે. ૨ ને ૮ ની વચમાં ૪,
૮ અને ૩૨ ની વચમાં ૧૬, ૩૨ ને ૧૨૮ ની વચમાં ૬૪
અને ૧૨૮ ને ૫૧૨ ની વચમાં ૨૫૬ આવશે. તેથી ૨, ૪,
૮, ૧૬, ૩૨, ૬૪, ૧૨૮, ૨૫૬, ૫૧૨ એ ભૂમીતિ પ્રમાણ થયું.

૩ આદિ, અંત ને ગચ્છ ઉપરથી ગુણોત્તર કહાડવું
હોય તો- અંત ને આદિએ ભાગી તેનું ગચ્છ-૧ ધાતમૂળ
કાહાડવું. એટલે $\text{ગુ} = \frac{\text{અ} - ૧}{\text{આ}}$

- કારણ-ઉપરના ૧ લા કોઠા પ્રમાણે અંતપદ ખરાબ
આદિપદને ગુણોત્તરના ગચ્છ-૧ ધાત ગણા કરીએ છીએ
માટે અંતને આદિએ ભાગ્યાથી ગુણોત્તરનો ગચ્છ-૧ ધાત
આવશે, તેથી તે ભાગાકારનું ગચ્છ-૧ ધાતમૂળ કહાડવાથી
ગુણોત્તર આવવું જોઈએ.

(૧૧૪)

સિદ્ધતા. અં = આ × ગુ^૧ - ૧

બંને તરફ આદિએ બાબ્યાથી $\frac{અ. ગ-૬}{આ.} = ગુ$

બંને તરફનું ગ-૧ ધાતમૂળ કઢાડયાથી $\sqrt{\frac{અ. ગ-૧}{આ.}} = ગુ. એજ.$

૪. આદિ ગુણોત્તરને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કઢાડવું હોય તો—

$$સ = \frac{આ (ગ-૧)}{ગુ-૧}$$

સિદ્ધતા—ધારો કે ૨, ૬, ૧૮, ૫૪, ૧૬૨, ૪૮૬ એ
એ છ પદનો સરવાળો કરવો છે તો સર્વધન = ૨ + ૬ + ૧૮
+ ૫૪ + ૧૬૨ + ૪૮૬ થયા. માટે બંને તરફનાને ત્રણ ગણાકર્યા તો
૩સ = ૬ + ૧૮ + ૫૪ + ૧૬૨ + ૪૮૬ + ૧૪૫૮ થયા તેમાંથી

સ = ૨ + ૬ + ૧૮ + ૫૪ + ૧૬૨ + ૪૮૬ બાદ કર્યું તો—

૨સ = ૧૪૫૮ - ૨ રહ્યા માટે સ = $\frac{૧૪૫૮-૨}{૨}$ પણ ૧૪૫૮ એ ગુ-
ણોત્તરના ગચ્છ ધાતને આદિએ ગુણીએ તેની બરાબર છે,
ને-૨ એ આદિ પદની બરાબર છે તથા છેદના બે એ ગુણોત્તર
-૧ની બરાબર છે માટે સ = $\frac{૧૪૫૮-૨}{૨}$ અથવા સ = $\frac{આ \times ગુ - આ}{ગુ-૧}$

જમણી તરફના અંશમાંથી આ ગુણક કઢાડયો તો—

$$સ = \frac{આ (ગુ-૧)}{ગુ-૧} એ જવાબ.$$

૫ અંત, ગુણોત્તર ને ગચ્છ ઉપરથી આદિપદ કઢાડવું
હોય તો ૧ લા કોઠા પ્રમાણે અં = આ × ગુ^૧ - ૧ બંને તરફ ગુ^૧
બાબ્યા તો અં

$$\frac{અ. ગ-૧}{ગુ-૧} = આ એ જવાબ.$$

૬ આદિ. અંત ને ગુણોત્તર ઉપરથી સર્વધન કઢાડવું.
હોય તો ઉપર ૪થા કોઠાની સિદ્ધતા કરી તે પ્રમાણે.

(૧૧૫)

સ=૧+૩+૫+૭+૯+૧૧+૧૩ છે તેને ત્રમણા કર્યા તો.
 ૩ સ=૩+૫+૭+૯+૧૧+૧૩+૧૫ આવ્યા.
 તેમાંથી ૧ છુટાડે સ=૧+૩+૫+૭+૯+૧૧+૧૩ બાદ કર્યા તો.

૨સ=૧૨૯-૧ પણ ૭૨૬તર ૪૩૩ છે એટલે
 આંત×ગુણોત્તર છે. બંને તરફ બેએ ભાગ્યા તો સ=૭૨૬-૧

અથવા $\frac{અ' \times ગુ - આ}{ગુ - ૧}$ આવ્યા તેથી. સ= $\frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}$

૭ આંત, ગચ્છ, અને ગુણોત્તર ઉપરથી સર્વધન કહાડયું
 હોયતો ૬ઠા કોઠા પ્રમાણે સ= $\frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}$ છે તેમાંથી આ ની
 કીંમત પમા કોઠા પ્રમાણે લખીતો સ= $\frac{અ' ગુ - \frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}}{ગુ - ૧}$ અથવા

સ= $\frac{અ' ગુ \times ગુ = \frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}}{ગુ - ૧}$ આંશ અને છેદ બંનેને ગુ-૧

ગુણાતો સ= $\frac{અ' ગુ - અ' ગુ - અ' ગુ + આ}{ગુ - ૧}$ આંશમાં આ ગુણુક

કહાડયો તો સ= $\frac{અ' (ગુ - ગુ - ગુ + ૧)}{ગુ - ૧}$

૮ આદિ, આંતને ગચ્છ ઉપરથી સર્વધન કહાડયુ હોય તો—

૬ ઠા કોઠા પ્રમાણે સ= $\frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}$ એમાં ૩ જા કોઠા પ્રમાણે

ગુણોત્તરની કીંમત લખીતો સ= $\frac{અ' \times \sqrt{\frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}}}{\sqrt{\frac{અ' ગુ - આ}{ગુ - ૧}}}$

૬ સર્વધન, આદીને અંત ઉપરથી ગુણોત્તર કઢાડવું હોયતો—

૬ઠા કોઠા પ્રમાણે $s = \frac{અ'ગુ-આ}{ગુ-૧}$ ને ૪થા કોઠા પ્રમાણે—

$s = \frac{આ(ગુ-૧)}{ગુ-૧}$ તેથી એ બંને કીંમત બરાબર છે માટે

$\frac{અ'ગુ-આ}{ગુ-૧} = \frac{આ(ગુ-૧)}{ગુ-૧}$ બંને તરફ ગુ-૧ ગણા કર્યા તો—

$અ'ગુ-આ = આ(ગુ-૧)$ પણ ૪ થા કોઠા પ્રમાણે $s = \frac{આ(ગુ-૧)}{ગુ-૧}$

છે તો છેદ ઉરાડયાથી સગુ-સ=આ (ગુ-૧) આવ્યા અને ઉપર આ (ગુ-૧)=અ'ગુ-આ છે તેથી સગુ-સ=અ'ગુ-આ થવા જોઈએ. સ્થળાંતર કર્યાથી સગુ-અ'ગુ=સ-આ અથવા ગુ [સ-અ']=સ-આ છે તો બંને તરફ સ-અ'બાબ્યાથી ગુ = $\frac{સ-આ}{સ-અ'}$

૧૦ સર્વધન, અંત, ને ગુણોત્તર ઉપરથી આદિ કઢાડવાનું નવમા કોઠા પ્રમાણે $સ = \frac{સ-આ}{સ-અ'}$ છેદ ઉરાડયાથી સગુ-અ'ગુ = સ-આ. સ્થળાંતર કર્યાથી આ = અ'ગુ-સગુ+સ અથવા આ = અ'ગુ-સ[ગુ-૧] જવાબ.

૧૧ સર્વધન, ગદ્દ અને ગુણોત્તર ઉપરથી આદિ કઢાડવાનું ૪થા કોઠા પ્રમાણે $s = \frac{આ(ગુ-૧)}{ગુ-૧}$ છેદ ઉરાડયા તો સગુ-સ =

$આ(ગુ-૧)$ બંને તરફ ગુ-૧ બાબ્યા તો $\frac{સગુ-સ}{ગુ-૧} = આ$.

૧૨ સર્વધન, ગુણોત્તર ને ગદ્દ ઉપરથી અંત કઢાડવાનું. ૧ લા કોઠા પ્રમાણે અ = આગુ-૧ છે એમાં ૧૧મા કોઠા પ્રમાણે આ ની કીંમત લખી તો અ = $(\frac{સગુ-સ}{ગુ-૧})^{ગુ-૧}$

અથવા અ = $(\frac{સ(ગુ-૧)}{ગુ-૧})^{ગુ-૧}$ ગુણકે ગુણ્યાથી અ = $\frac{સ(ગુ-ગુ-૧)}{ગુ-૧}$ જ.

૧૩ આદિ, સર્વવનને ગુણોત્તર ઉપરથી અંત કહાડવાનું
 દશમા કોડા પ્રમાણે આ=અંગુ-સ (ગુ-૧) સ્થળાંતરથી
 આ+સ(ગુ-૧)=અંગુ બંને તરફ ગુ એ ભાગ્યથી—

$$\frac{\text{આ}+\text{સ (ગુ-૧)}}{\text{ગુ}} = \text{અંગુ}$$

ભૂમીતિ પ્રમાણુ શ્રેઢીના કોડા.

અઢવી શ્રેઢી.

ઉતરતી શ્રેઢી

- (૧) આ = $\frac{\text{અંગુ}}{\text{ગુ-૧}}$ (૧) આ = $\frac{\text{અંગુ}}{\text{ગુ-૧}}$
- (૨) આ = અંગુ-સ (ગુ-૧) (૨) આ = અંગુ + સ-સગુ
- (૩) આ = $\frac{\text{સ-૩-સ}}{\text{ગુ-૧}}$ (૩) આ = $\frac{\text{સ-સગુ}}{\text{૧-ગુ-૧}}$
- (૪) અંગુ = સ(ગુ-૧) (૪) અંગુ = $\frac{\text{ગુ-૧}}{\text{આ}}$
- (૫) અંગુ = સ(ગુ-૧-ગુ-૧) (૫) અંગુ = $\frac{\text{સ ગુ-૧-ગુ-૧}}{\text{૧-ગુ-૧}}$
- (૬) અંગુ = $\frac{\text{આ}+\text{સ(ગુ-૧)}}{\text{ગુ}}$ (૬) અંગુ = $\frac{\text{આ (સ-સગુ)}}{\text{ગુ}}$
- (૭) ગુ = $\frac{\text{ગુ-૧}}{\sqrt{\frac{\text{અંગુ}}{\text{આ}}}}$ (૭) ગુ = $\frac{\text{ગુ-૧}}{\sqrt{\frac{\text{અંગુ}}{\text{આ}}}}$
- (૮) ગુ = $\frac{\text{સ-આ}}{\text{સ-અંગુ}}$ (૮) ગુ = $\frac{\text{સ-આ}}{\text{સ-અંગુ}}$
- (૯) સ = $\frac{\text{આ (ગુ-૧)}}{\text{ગુ-૧}}$ (૯) સ = $\frac{\text{આ (૧-ગુ)}}{\text{૧-ગુ}}$
- (૧૦) સ = $\frac{\text{અંગુ-આ}}{\text{ગુ-૧}}$ (૧૦) સ = $\frac{\text{આ-અંગુ}}{\text{૧-ગુ}}$
- (૧૧) સ = અંગુ ($\frac{\text{ગુ-૧}}{\text{ગુ-અંગુ-ગુ-૧}}$) અંત શ્રેઢી હોય તો

$$\frac{\text{સ}=\frac{\text{આ}}{\text{૧-ગુ}}}{\text{૧-ગુ}}$$
- (૧૨) સ = $\frac{\text{અંગુ} \times \text{ગુ-૧}}{\sqrt{\frac{\text{અંગુ}}{\text{આ}}}} - \text{આ}$

સંખ્યાનો પાયો.

સંખ્યા લખવામાં જગણા હાથ બાણીના છેલ્લા અંગ થવા એકમના સ્થાન કરતાં ડાબા હાથ બાણીનું દરેક સ્થાન જેટલા ધણું વધતું જાય તેને સંખ્યાનો પાયો કહે છે. આપણી સંખ્યાનો પાયો દશ છે. અને એજ રીતે સુધરેલા બધા દેશોમાં હાલ ચાલે છે. સંખ્યાના પાયાના અર્થ ઉપરથી સમજાશે કે જે સંખ્યાનો જેટલો પાયો હોય તેના કરતાં એક ઓછા એટલા તે પાયાના. એકમ હોય, તે તે સંખ્યાના દશકાનું સ્થાન એકમ કરતાં તે સંખ્યા ગણું હોય શતકતું સ્થાન તે પાયાની સંખ્યાના વર્ગ ગણું. જેમ કે સાતના પાયામાં એકમ ૬ સુધી હોય. તે સાત એ એક દશકનીને આઠ એ એક દશકને એક એકગતી બરાબર છે. ૪૯ એ સાતના પાયાના સાત દશક અથવા સોની બરાબર થાય. તેમજ પંદરના પાયામાં ચૈદ સુધી એકમ ને પંદર એ એક દશકની બરાબર થાય. ૩૦ એ દશકની ને ૨૨૫ એ પંદર દશક અથવા એક શતકની બરાબર છે. આપણી સંખ્યા દશના પાયાની હોવાથી ચૈદ લખવા હોય તો એક દશકને ચાર એકમ એટલે ચૈદ લખાય. પણ પંદરના પાયામાં ચૈદ એકમ સ્થાનને લખવાનું એક અંક જોઈએ, તે ખુટ આપણા ગણિતના ગ્રંથોમાં અંકને બદલે અક્ષર લેખને પુરી પાડી છે. જેમકે પંદરના પાયામાંના દશ લખવા હોય તો અ અગીઆર લખવા હોયવા બ બાર લખવા હોય તો ક તેર લખવા હોય તો ડ અને ચૈદ લખવા હોય તો ઇ ઇત્યાદિ અક્ષરો છે.

એક પાયાની સંખ્યાને બીજા પાયામાં લાવવાની રીતનીચે મુજબ.

જે પાયાની સંખ્યામાં લાવવા હોય તેને તેટલાએ ભાગવા. જે વધે તે એકમ આવશે અને જે ભાગાકાર આવશે હશે તે દશક આવશે. તેને ફરીને તે પાયાની સંખ્યાએ ભાગવાથી શતક આવશે, અને વધશે તે દશક વધશે. એ પ્રમાણે છેવટ સુધી કરવું.

આ રીતનું કારણ સમજવવાને એક દાખલો લઈએ.

દા. ૧. ૪૨૫ દશના પાયાની સંખ્યાને સાતમા પાયામાં લાવે.

૭ | ૪૨૫ આમાં ૪૨૫ને સાતે ભાગ્યા તો દશના પાયાના

૭ | ૬૦-૫ ૬૦ સાતમા પાયાના દશક આવ્યા એ દશક

૭ | ૮-૪ ને સાતે ભાગ્યાથી દશના પાયાના ૮ સાતના

૭ | ૧-૧ પાયાના સો આવ્યા તેને સાતે ભાગ્યાથી ૧ હ-

જાર આવ્યો એટલે ૪૨૫ દશના પાયાના ૧૧૪૫ સાતના

પાયાનાની બરાબર થયા. ફરી એજ રકમને દશના પાયામાં

લાવ્યાથી ઉપરું કારણ જલદી સમજશે.

દા. ૨જો | ૧૧૪૫ સાતના પાયાના છે તેને દશના પા-

૧૦ | ૧૦-૫

૧૦ | ૪-૨

યામાં લાવે. આમાં સાતના પાયાના

એક હજારને દશે ભાગાતા નથી માટે તેના ૭ શતક + ૧ શતક

= આઠ શતક થયા, પણ આઠ શતકને દશે નહીં ભાગવાથી તેના

દશક કરી ચાર દશક ઉમેર્યા તો ૬૦ દશકને દશે ભાગ્યા તો ૪૨

દશક થયા. માટે ૪ સોને એ દશક થય', એટલે ૧૧૪૫ સા-

તના પાયાના ૪૨૫ દશના પાયાનાની બરાબર છે.

આ રીતે કોઈપણ પાયામાં ને પાયાની સંખ્યાઓનો

સરવાળો, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર વગેરે થઈ શકે છે.

માત્ર તે ગણવામાં ગણનારે તે સંખ્યા દશક, શતક છતાં

ની કોમત યાદ રાખવી જોઈએ. જેમકે ૧૧૨૫ અને ૩૪

સાતના પાયાની સંખ્યાઓ છે તેનો સરવાળો, બાદબાકી

ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરવો હોય તો.

| સરવાળો. | બાદબાકી. | ગુણાકાર. | ભાગાકાર. |
|---------|----------|----------|------------|
| ૧૧૨૫ | ૧૧૨૫ | ૧૧૨૫ | ૩૪)૧૧૨૫(૨૨ |
| ૩૪ | ૩૪ | ૩૪ | ૧૦૧ |
| ૧૧૬૨ | ૧૦૬૧ | ૪૫૩૬ | ૧૧૧ |
| | | ૩૪૧૧ | ૧૦૧ |
| | | ૪૧૬૪૬ | ૧૪ |

આ દરેક દિસામ ગણવામાં વાંચનાર જોશે કે સાતની વધી ગણવામાં આવે છે.

અપૂર્ણાંકમાં પણ એજ સંખ્યા રાખ્યાથી થઇ શકશે. કોઈ પણ અપૂર્ણાંકનો સરવાળો, બાદબાકી ઇત્યાદિ કરવામાં તેના અંશ ને છેદને દશના પાયામાં લાવીને કરવાથી વધારે સુગમ પડશે. પરંતુ તેમ કર્યા સિવાય પણ ઉપરની રીતે થઇ શકશે ખરા. પુનરાવર્ત દશાંશને વ્યવહારીમાં મુખ્ય પછી તેનો સરવાળોબાદબાકી ઇત્યાદિ જે કરવું હોય, તે થઈ શકશે.

દા. $\frac{૭૩}{૬૨} + \frac{૪}{૫}$ એ આઠના પાયાની સંખ્યાનો સરવાળો કરવો હોય તો તેનો સમ છેદ કરવાથી થશે અને બીજી રીતે પણ થશે. બીજી રીતે

$\frac{૭૩}{૬૨} + \frac{૪}{૫} = \frac{૭૩}{૬૨} + \frac{૪ \times ૫}{૫ \times ૬૨} = \frac{૭૩}{૬૨} + \frac{૨૦}{૩૧૦} = \frac{૧૧૩}{૩૧૦}$ અંશ છેદને પાંચે છેદ ઉરાડયો તો $\frac{૧૧૩}{૩૧૦} = \frac{૧૧૩}{૬૨}$ જવાળ.

દા. ૮. ન સાતના પાયામાં લાવવા હોયતો પ્રથમતેને વ્યવહારીનું ૩૫ આપ્યું તો $\frac{૬}{૩૫}$ આવ્યા તેને સાતના પાયામાં લાવવાને તો આઠ ને સાતના પાયામાં લાવ્યા તો ૧૧ અને નવને સાતના પાયામાં લાવે તો ૧૨ આવે એટલે .૮દશના પાયાના $= \frac{૧૧}{૬૨}$ સાતના પાયાના એ જવાળ.

એજ પ્રમાણે જુદા જુદા પાયાની સંખ્યાઓનો સરવાળો, બાદબાકી અમુક પાયાની સંખ્યામાં પણ લવાશે. તેમજ સાતના પાયાની સંખ્યાનો ને પંદરના પાયાની સંખ્યાનો સરવાળો, બાદબાકી ઇત્યાદિ બારના પાયામાં લાવી શકાશે. કેમકે પ્રથમ બંને જુદા જુદા પાયાની સંખ્યાને બારના પાયામાં લાવી તેનો સરવાળો, બાદબાકી ઇત્યાદિ જે કરવું હશે તે થશે.



જાહેર ખબર.



નીચે લખેલી ચોપડીઓ આર્યોદય પ્રેસમાંથી

રોકડી કીમતે મળશે.

| | | | | |
|------------------------------------|-----|-------|--------|---------|
| અંગ્રગણિતનાં કારણ. | ... | ... | કીમત | ૨૦-૬-૧ |
| રાણી રૂપસુંદરી. | ... | ... | „ | ૨૦-૫-૦ |
| પુસ્તકમાળાનાં સંગ્રહ ભાગ ૧લો. | ... | કીમત. | ૨૦-૪-૦ | |
| પુસ્તકમાળાનો સંગ્રહ ભાગ ૨જો | ... | „ | ૨૦-૬-૬ | |
| અંગ્રગણિતની સમજાવણી. | ... | ... | „ | ૨૦-૧૦-૦ |
| પતિવ્રતા સ્ત્રી. | ... | ... | „ | ૨૦-૬-૦ |
| લાલશંકર તા. હરગોવિન્દરાસ કૃત મોહું | | | | |
| અંગ્રગણિત. | ... | ... | „ | ૨૧-૫-૦ |
| ઈતિહાસના પ્રશ્નોત્તર. | ... | ... | „ | ૨૦-૪-૦ |
| પ્રાચીન કાવ્ય— | | | | |
| રણપત્ન. | ... | ... | „ | ૨૦-૫-૦ |
| ચંદ્રદાસ. | ... | ... | „ | ૨૦-૫-૦ |
| હારમાળા. | ... | ... | „ | ૨૦-૮-૦ |
| અંગદ વિષ્ણુ. | ... | ... | „ | ૨૦-૮-૦ |
| માપકરણની સમજાવણી. | ... | ... | „ | ૨૦-૨-૦ |
| રામાયણ. | ... | ... | „ | ૨૧-૦-૦ |



